UBND TỈNH QUẢNG NAM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUẢNG NAM

KHOA TOÁN

KHÓA LUẬN TỐT NGHIỆP ĐẠI HỌC

Tên đề tài:

MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐA THỨC ĐỐI XỨNG VÀO TOÁN SƠ CẤP

Sinh viên thực hiện

Võ Thị Hồng Sương

MSSV: 2110010154

Chuyên ngành: Sư phạm Toán

Khóa 2010– 2014

Cán bộ hướng dẫn:

Th.S Võ Văn Minh

Phần 1. MỞ ĐẦU

Đại số sơ cấp bao gồm những khái niệm cơ bản của đại số, một phân nhánh của toán học. Đại số sơ cấp thường được dạy ở cấp trung học và được xây dựng dựa trên những hiểu biết về số học. Trong khi số học liên quan tới những con số cụ thể, đại số giới thiệu những con số không có giá trị cố định, được gọi là các biến số. Việc sử dụng biến số đòi hỏi phải sử dụng ký hiệu đại số và hiểu các quy tắc chung của các phép tính được sử dụng trong số học. Sử dụng các biến số để biểu diễn các con số cho phép ta biểu diễn chính xác mối quan hệ chung giữa những con số giúp giải quyết các bài toán rộng hơn.

Các bài toán đại số luôn chiếm một vị trí quan trọng đối với toán phổ thông, cũng là lĩnh vực mà các nhà nghiên cứu sáng tạo ra rất đầy đủ và hoàn thiện. Về đa thức đối xứng, có những ứng dụng rộng rãi trong đại số sơ cấp. Song nếu hiểu rõ về đa thức đối xứng, chúng ta có thể vận dụng kiến thức liên quan để giải được nhiều dạng toán như: chứng minh hằng đẳng thức, chứng minh bất đẳng thức, các bài toán về phương trình và hệ phương trình, bài toán phân tích đa thức thành nhân tử,… mà trong chương trình phổ thông, các kì thi học sinh giỏi đều đề cập đến.

Khóa luận nhằm giới thiệu về đa thức đối xứng và những ứng dụng của nó trong đại số sơ cấp. Ngoài phần mở đầu và kết luận, nội dung được trình bày theo 2 chương:

Chương 1: Các khái niệm cơ bản về đa thức đối xứng.

Chương 2: Một số ứng dụng của đa thức đối xứng để giải toán sơ cấp.

1.1. Lý do chọn đề tài:

Trong những năm học tập ở giảng đường Đại học, mỗi sinh viên ngành Sư phạm Toán đều được trang bị kiến thức về toán học cao cấp, sơ cấp. Toán sơ cấp là một trong những lĩnh vực quan trọng của toán học và được ứng dụng nhiều trong các lĩnh vực khác. Nói về toán sơ cấp thì không thể không nói đến những lĩnh vực phức tạp của đại số mà học sinh phổ thông thường gặp như giải phương trình và hệ phương trình, phân tích đa thức thành nhân tử, chứng minh các đẳng thức, bất đẳng thức,... Vấn đề liên quan và thường gặp trong các bài toán của các lĩnh vực được đề cập ở trên là khi biến số của đa thức có vai trò như nhau được gọi là đa thức đối xứng. Tính đối xứng của đa thức có vai trò rất quan trọng trọng việc giải các bài toán, nó giúp chúng ta giải quyết bài toán một cách ngắn gọn và dễ hiểu hơn.

Bản thân tôi là sinh viên năm cuối ở trường Đại học, với mong muốn tìm hiểu vấn đề về toán sơ cấp nói chung và đại số sơ cấp nói riêng liên quan đến việc giải các bài toán có tính chất đối xứng, cũng như trang bị cho bản thân một số kiến thức cho việc dạy học ở trường phổ thông sau này. Từ những lý do trên, tôi chọn đề tài: "**Một số ứng dụng của đa thức đối xứng vào toán sơ cấp**" làm khóa luận tốt nghiệp của mình.

1.4. Mục tiêu của đề tài:

Đề tài "Một số ứng dụng của đa thức đối xứng vào toán sơ cấp" nhằm thể hiện rõ vai trò của Giải tích và Đại số trong khảo sát đa thức đồng thời khai thác một số ứng dụng của đa thức đối xứng trong các bài toán phân tích đa thức thành nhân tử, chứng minh các đẳng thức và bất đẳng thức,... liên hệ với chương trình phổ thông. Nhằm giải quyết được phần nào khó khăn khi giải các bài toán đại số liên quan đến tính đối xứng cũng như thấy được tầm quan trọng của đa thức đối xứng trong toán sơ cấp.

1.3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu:

Nghiên cứu các tài liệu, giáo trình và các sách chuyên đề về đa thức, phương trình và hệ phương trình, các bài báo toán học về đa thức đối xứng, nhằm hệ thống các dạng toán về đa thức.

1.4. Phương pháp nghiên cứu:

Trong quá trình nghiên cứu đề tài, tôi đã sử dụng các phương pháp phân tích, phương pháp tổng hợp, phương pháp logic (tính hệ thống), phương pháp chuyên gia (cố vấn).

1.5. Đóng góp của đề tài:

Đề tài đóng góp thiết thực trong việc dạy và học về đa thức đối xứng, phương trình, bất phương trình, đẳng thức, bất đẳng thức, … trong chương trình toán ở THPT, đem lại niềm đam mê sáng tạo từ những bài toán cơ bản nhất.

1.6. Cấu trúc đề tài: ngoài phần mở đầu và kết luận, nội dung được trình bày theo 2 chương:

Chương 1: Các khái niệm cơ bản về đa thức đối xứng.

Chương 2: Một số ứng dụng của đa thức đối xứng để giải một số bài toán sơ cấp.

LỜI CẢM ƠN

Em xin gửi lời cảm ơn ban lãnh đạo Trường Đại học Quảng Nam, ban lãnh đạo khoa Toán nói chung và các thầy cô trong khoa nói riêng đã quan tâm và nhiệt tình hướng dẫn em hoàn thành khóa luận tốt nghiệp.

Em xin chân thành cảm ơn thầy Võ Văn Minh đã hướng dẫn và tận tình giúp đỡ em hoàn thành khóa luận của mình.

Song do hạn chế về mặt kiến thức của bản thân nên khóa luận không tránh khỏi những sai sót rất mong sự đóng góp của quý thầy cô và các bạn để khóa luận hoàn chỉnh hơn. Xin chân thành cảm ơn.

MỤC LỤC

Phần 2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU 1

Chương I: CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ ĐA THỨC ĐỐI XỨNG 1

1.1. Đa thức đối xứng hai biến: 1

1.1.1. Các khái niệm cơ bản: 1

1.1.2. Tổng lũy thừa: 2

1.2. Đa thức đối xứng ba biến: 5

1.2.1. Các khái niệm cơ bản: 5

1.2.2. Tổng lũy thừa và tổng nghịch đảo: 6

1.3. Đa thức đối xứng *n* biến: 13

1.3.1. Các khái niệm cơ bản: 13

1.3.3. Các định lý của đa thức đối xứng n biến: 14

Chương II: MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐA THỨC ĐỐI XỨNG 15

ĐỂ GIẢI TOÁN SƠ CẤP 15

2.1. Phân tích đa thức thành nhân tử: 15

2.2. Phương trình hệ số đối xứng và phương trình hồi quy (phương trình thuận nghịch): 21

2.4. Chứng minh bất đẳng thức: 29

2.4.1. Trường hợp hai biến: 29

2.4.2. Trường hợp ba biến: 33

2.5. Tìm nghiệm nguyên của phương trình và hệ phương trình đối xứng: 37

2.6. **Một số phương trình và hệ phương trình đối xứng ở phổ thông:** 40

2.6.1. Một số phương trình đối xứng với hai biểu thức: 40

2.6.1.1. Phương trình đối xứng đối với x và $\frac{1}{x}$***:*** 40

2.6.1.2. Phương trình đối xứng với cosx và sinx: 43

2.6.1.3. Phương trình đối xứng với $\sin^2 x$ ***và*** $\cos^2 x$***:*** 47

2.6.2. Một số hệ phương trình đối xứng: 48

2.6.2.1. Hệ phương trình đối xứng loại I: 48

2.6.2.2. Hệ phương trình đối xứng loại II: 56

Phần 3. KẾT LUẬN: 64

Phần 4. TÀI LIỆU THAM KHẢO 65

Phần 2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

Chương I: CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ ĐA THỨC ĐỐI XỨNG

1.1. Đa thức đối xứng hai biến:

1.1.1. Các khái niệm cơ bản:

Định nghĩa 1: Một đơn thức $f(x,y)$ của các biến độc lập *x, y* (trường hợp chung nhất có thể là các số phức) được hiểu là hàm số có dạng:

$$f(x,y) = a_{kl}x^k y^l.$$

Trong đó, a_{kl} là hằng số; *k, l* là những số nguyên không âm.

Số a_{kl} được gọi là hệ số, *k + l* được gọi là bậc của đơn thức $f(x,y)$, được kí hiệu là

$$\deg f(x,y) = \deg\left[a_{kl}x^k y^l\right] = k + l.$$

Các số *k, l* tương ứng được gọi là bậc của đơn thức đối với các biến *x, y*.

Như vậy, bậc của đơn thức hai biến bằng tổng các bậc của các đơn thức theo từng biến.

Ví dụ: $\deg\left(5x^2y^3\right) = 5$.

Định nghĩa 2: Hai đơn thức của các biến *x, y* được gọi là đồng dạng nếu bậc của *x* và *y* tương ứng ở 2 đơn thức là bằng nhau và hệ số của 2 đơn thức là khác nhau. Như vậy, hai đơn thức được gọi là đồng dạng nếu chúng có dạng: $Ax^k y^l, Bx^k y^l \ (A \neq B)$.

Ví dụ: $3x^2y^5, 9x^2y^5$ là hai đơn thức đồng dạng.

Định nghĩa 3: Giả sử $Ax^k y^l$, $Bx^m y^n$ là hai đơn thức của các biến *x, y*. Ta nói rằng đơn thức $Ax^k y^l$ trội hơn đơn thức $Bx^m y^n$ theo thứ tự của các biến *x, y* nếu $k > m$, hoặc $k = m$ và $l > n$.

Định nghĩa 4: Một hàm số *P(x,y)* được gọi là một đa thức theo các biến số *x, y* nếu nó có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của hữu hạn các đơn thức. Như vậy đa thức *P(x,y)* theo các biến số *x, y* là hàm số có dạng: $P(x,y) = \sum_{k+l<m} a_{kl}x^k y^l$

Bậc lớn nhất của các đơn thức trong đa thức được gọi là bậc của đa thức.

Ví dụ: Đa thức $x^2y^2 + x^3y + y^5$ có bậc 5.

Định nghĩa 5: Đa thức *P(x,y)* được gọi là đa thức đối xứng của hai biến *x, y* nếu nó không thay đổi khi đổi chỗ của *x* và *y*, nghĩa là: *P(x,y) = P(y,x)*

Ví dụ: $P(x,y) = x^2 + xy + y^2$; $Q(x,y) = x^2y + y^2x$

Định nghĩa 6: Các đa thức $\sigma_1 = x + y$; $\sigma_2 = xy$ được gọi là các đa thức đối xứng cơ bản của các biến *x, y*.

Định nghĩa 7: Đa thức đối xứng $P(x,y)$ được gọi là thuần nhất bậc *m*, nếu:

$$P(tx,ty) = t^m P(x,y),\ \forall t \neq 0$$

Ví dụ: Đa thức $P(x,y) = x^2 + y^2$ là đa thức thuần nhất bậc 2, bởi vì

$$P(tx,ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2(x^2 + y^2) = t^2P(x,y)$$

1.1.2. Tổng lũy thừa:

Định nghĩa 8: Các đa thức $s_k = x^k + y^k\ (k \in \mathbb{Z})$ được gọi là tổng lũy thừa của các biến *x, y*.

Định lý 1: Một tổng lũy thừa $s_k = x^k + y^k\ (k \in \mathbb{Z})$ có thể biểu diễn được dưới dạng một đa thức bậc *k* của σ_1, σ_2.

Chứng minh:

Ta có:

$$\sigma_1 s_{k-1} = (x+y)(x^{k-1} + y^{k-1}) = x^k + y^k + xy(x^{k-2} + y^{k-2}) = s_k + \sigma.s_{k-2}$$

Như vậy ta có $s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma.s_{k-2}$ (1)

Công thức (1) được gọi là công thức Newton, nó cho phép tính s_k theo s_{k-1} và s_{k-2}.

Với $m = 1$, $m = 2$ định lý 1 đúng vì:

$$
\begin{aligned}
&s_1 = x + y = \sigma_1 \\
&s_2 = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2
\end{aligned}
$$

Giả sử định lý đã đúng với $m < k$. Khi đó s_{k-1} và s_{k-2} lần lượt là các đa thức bậc k-1, k-2 của σ_1, σ_2. Theo công thức (1) ta suy ra s_k là đa thức bậc k của σ_1, σ_2. Theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Sử dụng công thức (1) và các biểu thức của s_1, s_2 ở chứng minh trên ta nhận được các biểu thức sau:

$$
\begin{aligned}
&s_1 = \sigma_1 \\
&s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \\
&s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 \\
&s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 \\
&s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Ta thấy rằng trong khai triển của s_k nếu sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của σ_1 thì:

- Số mũ của σ_1 giảm dần đều hai đơn vị từ k xuống 0 hoặc 1 tùy theo k chẵn hay k lẻ.

- Số mũ của σ_2 tăng dần đều một đơn vị, từ 0 đến $\left[\frac{k}{2}\right]$

- Các hệ số trong biểu diễn của s_k đan dấu. Hệ số thứ 1, 3, 5, … là dương, còn các hệ số thứ 2, 4, 6,… là âm.

1.1.3. Các định lý về đa thức đối xứng hai biến:

Định lý 2: (Định lý cơ bản) Mọi đa thức đối xứng $P(x,y)$ của các biến x, y đều có thể biểu diễn được dưới dạng đa thức $p(\sigma_1,\sigma_2)$ theo các biến $\sigma_1 = x + y$ và $\sigma_2 = xy$, nghĩa là: $P(x,y) = p(\sigma_1,\sigma_2)$

Chứng minh:

- Xét trường hợp đơn thức có dạng $\alpha x^k y^k$ khi đó ta có $\alpha x^k y^k = \alpha(xy)^k = \alpha\sigma_2^k$.

- Xét trường hợp đơn thức dạng $\beta x^m y^n$ $(m \neq n)$: Vì *P(x,y)* là đa thức đối xứng nên có số hạng dạng $\beta x^n y^m$. Không mất tính tổng quát, giả sử $m < n$ ta xét tổng hai đơn thức trên ta có:

$$\beta(x^m y^n + x^n y^m) = \beta x^m y^m (x^{n-m} + y^{n-m}) = \beta\sigma_2^m s_{n-m}.$$

Theo công thức Newton, ta có s_{n-m} là một đa thức của các biến σ_1,σ_2 nên biểu thức trên là một đa thức của σ_1,σ_2.

Mọi đa thức đối xứng là tổng của các số hạng dạng $\alpha x^k y^k$ và $\beta x^m y^n$ $(m \neq n)$ nên mọi đa thức đối xứng đều biểu diễn được ở dạng đa thức theo các biến σ_1,σ_2.

Ví dụ: Biểu diễn đa thức sau theo các đa thức đối xứng cơ bản:

$$f(x,y) = x^5 + x^4y + x^3y^3 + xy^4 + y^5$$

Ta có:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^5 + x^4y + x^3y^3 + xy^4 + y^5 \\ &= (x^5 + y^5) + xy(x^3 + y^3) + (xy)^3 \\ &= s_5 + \sigma_2 s_3 + \sigma_2^3 \\ &= \left(\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2\right) + \sigma_2\left(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2\right) \\ &= \sigma_1^5 - 4\sigma_1^3\sigma_2 \end{aligned}$$

Định lý 3: (Tính duy nhất) Nếu các đa thức $\varphi(\sigma_1,\sigma_2)$ và $\psi(\sigma_1,\sigma_2)$ khi thay $\sigma_1 = x + y$ và $\sigma_2 = xy$ cho ta cùng một đa thức đối xứng $P(x,y)$, thì chúng phải trùng nhau, nghĩa là $\varphi(\sigma_1,\sigma_2) \equiv \psi(\sigma_1,\sigma_2)$.

1.2. Đa thức đối xứng ba biến:

1.2.1. Các khái niệm cơ bản:

Định nghĩa 9: Một đơn thức $f(x,y,z)$ của các biến *x, y, z* được hiểu là hàm số có dạng:

$$f(x,y,z)=a_{klm}x^k y^l x^m.$$

Với $k,l,m\in\mathbb{N}^*, k^2+l^2+m^2\neq 0$ được gọi là bậc của các biến *x, y, z*, số $a_{klm}\in\mathbb{R}^*$ được gọi là hệ số của đơn thức, còn số $k+l+m$ được gọi là bậc của đơn thức $f(x,y,z)$.

Định nghĩa 10: Một hàm số $P(x,y,x)$ của các biến *x, y, z* được gọi là một đa thức nếu nó có thể biểu diễn ở dạng tổng hữu hạn các đơn thức:

$$P(x,y,z)=\sum_{k+l+m\leq n} a_{klm}x^k y^l z^m.$$

Bậc lớn nhất của các đơn thức trong đa thức được gọi là bậc của đa thức.

Định nghĩa 11: Đa thức $P(x,y,x)$ được gọi là đa thức đối xứng nếu nó không thay đổi với mọi hoán vị của *x, y, z* nghĩa là:

$$\begin{aligned}P(x,y,x)&=P(x,z,y)=P(y,x,z)\\&=P(y,z,x)=P(z,x,y)=P(z,y,x).\end{aligned}$$

Ví dụ: Các đa thức dưới đây là các đa thức đối xứng theo các biến *x, y, z*

$$\begin{aligned}&f(x,y,z)=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2\\&g(x,y,z)=(x+y)(x+z)(y+z)\\&h(x,y,z)=(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2\end{aligned}$$

Định nghĩa 12: Đa thức đối xứng $P(x,y,x)$ được gọi là thuần nhất bậc *m*, nếu:

$$P(tx,ty,tz) = t^m P(x,y,z), \ \forall t \neq 0$$

Ví dụ: $P(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ là đa thức thuần nhất bậc 2 vì

$$P(tx,ty,tz) = t^2(x^2 + y^2 + z^2) = t^2 P(x,y,z), \ \forall t \neq 0$$

Định nghĩa 13: Các đa thức $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + yz + zx$, $\sigma_3 = xyz$ được gọi là các đa thức đối xứng cơ bản của các biến *x, y, z.*

1.2.2. Tổng lũy thừa và tổng nghịch đảo:

Định nghĩa 14: Các đa thức $s_k = x^k + y^k + z^k \ (k \in \mathbb{Z})$ được gọi là tổng lũy thừa bậc *k* của các biến *x, y, z.*

Định lý 4: (Công thức Newton) Với mọi $k \in \mathbb{Z}$, ta có hệ thức

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2.s_{k-2} + \sigma_3.s_{k-3}.$$

Chứng minh: Ta có

$$\begin{aligned}\sigma_1 s_{k-1} - \sigma.s_{k-2} + \sigma_3.s_{k-3} &= (x+y+z)\left(x^{k-1} + y^{k-1} + z^{k-1}\right) - (xy+yz+zx)\left(x^{k-2} + y^{k-2} + z^{k-2}\right) \\ &\quad + xyz\left(x^{k-3} + y^{k-3} + z^{k-3}\right) \\ &= x^k + y^k + z^k = s_k.\end{aligned}$$

Định lý 5: Mỗi tổng lũy thừa $s_k = x^k + y^k + z^k \ (k \in \mathbb{Z})$ đều có thể biểu diễn được dưới dạng một đa thức bậc n theo các biến $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Ta chứng minh định lý này bằng phương pháp quy nạp.

Dựa vào công thức Newton ta tính được:

$$\begin{aligned}
&s_0 = 3;\\
&s_1 = \sigma_1;\\
&s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2;\\
&s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3;\\
&s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3;\\
&s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3;\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Định nghĩa 15: Các biểu thức $s_{-k} = x^{-k} + y^{-k} + z^{-k} = \frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k}$ $(k \in \mathbb{Z})$ được gọi là tổng nghịch đảo của các biến *x, y, z*.

Trong công thức Newton nếu thay *k* bởi *3-k* ta được:

$$s_{-k} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} s_{1-k} - \frac{\sigma_1}{\sigma_3} .s_{2-k} + \frac{1}{\sigma_3} s_{3-k}$$

Sử dụng công thức này ta có thể tìm được các biểu thức của các tổng nghịch đảo theo các đa thức đối xứng cơ bản. Chẳng hạn:

$$\begin{aligned}
&s_{-1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3};\\
&s_{-2} = \frac{\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_3^2};\\
&s_{-3} = \frac{\sigma_2^3 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2}{\sigma_3^3};\\
&s_{-4} = \frac{\sigma_2^4 - 4\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3 + 4\sigma_2\sigma_3^2 + 2\sigma_1^2\sigma_3^2}{\sigma_3^4};\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Định nghĩa 16: (Quỹ đạo của đơn thức) Đa thức đối xứng với các số hạng tối thiểu, một trong các số hạng của nó là đơn thức $x^k y^l z^m$ được gọi là quỹ đạo của đơn thức $x^k y^l z^m$ và được kí hiệu là $O\left(x^k y^l z^m\right)$.

Như vậy, để tìm quỹ đạo của đơn thức $x^k y^l z^m$ ta bổ sung vào đơn thức đó tất cả các hoán vị của *x, y, z*. Với $k \neq l \neq m$, ta có:

$$O\left(x^k y^l z^m\right) = x^k y^l z^m + x^k y^m z^l + x^l y^k z^m + x^l y^m z^k + x^m y^k z^l + x^m y^l z^k.$$

Ví dụ: Quỹ đạo của đơn thức $O\left(x^3 y\right)$

$$O\left(x^3 y\right) = x^3 y + xy^3 + x^3 z + xz^3 + y^3 z + yz^3.$$

Nếu trong đơn thức $x^k y^l z^m$ có hai số mũ nào đó bằng nhau, chẳng hạn $k = l \neq m$, thì:

$$O\left(x^k y^k z^m\right) = x^k y^k z^m + x^k y^m z^k + x^m y^k z^k.$$

Chẳng hạn:

$$O\left(xy\right) = xy + yz + zx.$$

$$O\left(x^2 y^2\right) = x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2.$$

Các trường hợp riêng của quỹ đạo:

$$\begin{aligned}
&O\left(x\right) = x + y + z = \sigma_1;\\
&O\left(xy\right) = xy + yz + zx = \sigma_2;\\
&O\left(xyz\right) = xyz = \sigma_3;\\
&O\left(x^k\right) = O\left(y^k\right) = O\left(z^k\right) = x^k + y^k + z^k.
\end{aligned}$$

Định lý 6: Quỹ đạo của mọi đơn thứcbiểu diễn được dưới dạng đa thức theo các đa thức đối xứng cơ bản.

Chứng minh:

♦ Trường hợp 1: Quỹ đạo có dạng $O\left(x^k\right) = s_k$ (hoặc $O\left(y^k\right); O\left(z^k\right)$) thì theo định lý 5 thì $O\left(x^k\right)$ được diễn theo các đa thức đối xứng cơ bản.

♦ Trường hợp 2: Quỹ đạo có dạng $O\left(x^k y^l\right)$. Ta có công thức:

$$O\left(x^k y^l\right) = O\left(x^k\right)O\left(y^l\right) - O\left(x^{k+l}\right) \qquad (k \neq l).$$

Nếu $k = l$ thì ta có $O\left(x^k y^k\right) = \frac{1}{2}\left[\left(O\left(x^k\right)\right)^2 - O\left(x^{2k}\right)\right]$.

Vậy quỹ đạo của đơn thức dạng $O\left(x^k y^l\right)$ biểu diễn được dưới dạng đa thức theo các đa thức đối xứng cơ bản. Tương tự cho $O\left(x^k z^l\right)$ và $O\left(y^k z^l\right)$.

♦ Trường hợp 3: Quỹ đạo có dạng $O\left(x^k y^l z^m\right)$; $k \neq l \neq m \neq 0$. Khi đó ta có

$$O\left(x^k y^l z^m\right) = xyz\left[O\left(x^u y^v\right) + O\left(x^r z^t\right) + O\left(y^w z^s\right)\right] = \sigma_3\left[O\left(x^u y^v\right) + O\left(x^r z^t\right) + O\left(y^w z^s\right)\right]$$

Theo trường hợp 2 thì ta có $O\left(x^u y^v\right)$; $O\left(x^r z^t\right)$; $O\left(y^w z^s\right)$ có thể biểu diễn được theo các đa thức đối xứng cơ bản nên $O\left(x^k y^l z^m\right)$ biểu diễn được theo các đa thức đối xứng cơ bản.

Vậy quỹ đạo của mọi đơn thức có thể biểu diễn được dưới dạng đa thức theo các đa thức đối xứng cơ bản. Bằng cách trên ta dễ dàng nhận được các công thức sau:

Quỹ đạo $O\left(x^k y^l\right)$ biểu diễn ở dạng đa thức theo $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$
$O(xy) = \sigma_2$; $O\left(x^2 y\right) = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$; $O\left(x^2 y^2\right) = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3$; $O\left(x^3 y\right) = \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3$; $O\left(x^3 y^2\right) = \sigma_1\sigma_2^2 - 2\sigma_1^2\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3$; $O\left(x^3 y^3\right) = \sigma_2^3 + 3\sigma_2^3 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3$; $O\left(x^4 y\right) = \sigma_1^3\sigma_2 - 3\sigma_1\sigma_2^2 - \sigma_1^2\sigma_3 + 5\sigma_2\sigma_3$; $O\left(x^4 y^2\right) = \sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 - 2\sigma_1^3\sigma_3 + 4\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 3\sigma_3^2$; $O\left(x^5 y\right) = \sigma_1^4\sigma_2 - 4\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1^3\sigma_3 + 7\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_2^3 - 3\sigma_3^2$; ...

Sử dụng công thức biểu diễn tổng nghịch đảo theo các đa thức đối xứng cơ bản, ta dễ dàng tìm được các quỹ đạo $O\left(x^k y^k\right)$. Thật vậy ta có:

$$s_{-k} = x^{-k} + y^{-k} + z^{-k} = \frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k} = \frac{x^k y^k + x^k z^k + y^k z^k}{x^k y^k z^k} = \frac{O\left(x^k y^k\right)}{\sigma_3^k}.$$

Suy ra $O\left(x^k y^k\right) = \sigma_3^k . s_{-k}$.

1.2.3. Các định lý của đa thức đối xứng ba biến:

Định lý 7: (Định lý cơ bản). Mọi đa thức đối xứng ba biến *x, y, z* đều có thể biểu diễn dưới dạng đa thức theo các biến $\sigma_1 = x + y + z, \sigma_2 = xy + yz + zx, \sigma_3 = xyz$.

Chứng minh:

Giả sử $P(x,y,z)$ là đa thức đối xứng và $ax^k y^l z^m$ là một trong các số hạng của $P(x,y,z)$ do tính đối xứng nên $P(x,y,z)$ chứa quỹ đạo $O\left(x^k y^l z^m\right)$ với thừa số chung là *a*.

Ta có: $P(x,y,z) = a.O\left(x^k y^l z^m\right) + P_1(x,y,z)$.

Trong đó, $P_1(x,y,z)$ là đa thức đối xứng nào đó với ít số hạng hơn $P(x,y,z)$.

Tương tự, đối với $P_1(x,y,z)$ ta cũng có công thức như trên. Qua hữu hạn bước như trên ta có thể phân tích đa thức $P(x,y,z)$ thành tổng các quỹ đạo. Theo định lý 6, mỗi quỹ đạo lại là một đa thức theo các đa thức đối xứng cơ bản, do đó mọi đa thức đối xứng đều có thể biểu diễn ở dạng đa thức theo các đa thức đối xứng cơ bản.

Ví dụ: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$.

Định lý 8: (Tính duy nhất) Nếu hai đa thức $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ và $\psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ khi thay $\sigma_1 = x + y + z, \sigma_2 = xy + yz + zx, \sigma_3 = xyz$ cho ta cùng một đa thức đối xứng $P(x,y,z)$ thì chúng phải trùng nhau, nghĩa là $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \equiv \psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

Để biểu diễn một đa thức đối xứng qua các đối xứng cơ bản, một cách tổng quát ta tiến hành theo các bước trong chứng minh định lý 7. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp đa thức là thuần nhất, ta có thể dùng phương pháp hệ số bất định. Cơ sở của phương pháp này là mệnh đề sau.

Mệnh đề 1: Cho $f_m(x,y,z)$ là một đa thức đối xứng thuần nhất bậc *m*. Khi đó, $f_m(x,y,z)$ được biểu diễn qua các đa thức đối xứng cơ sở theo công thức:

$$f_m(x,y,z) = \sum_{i+2j+3k=m} a_{ijk}\sigma_1^i\sigma_2^j\sigma_3^k, \quad i,j,k \in \mathbb{N}$$

Mệnh đề được suy ra trực tiếp từ định lý trên.

Dưới đây là một số trường hợp riêng của mệnh đề:

$$\begin{aligned}
&f_1(x,y,z) = a_1\sigma_1;\\
&f_2(x,y,z) = a_1\sigma_1^2 + a_2\sigma_2;\\
&f_3(x,y,z) = a_1\sigma_1^3 + a_2\sigma_1\sigma_2 + a_3\sigma_3;\\
&f_4(x,y,z) = a_1\sigma_1^4 + a_2\sigma_1^2\sigma_2 + a_3\sigma_2^2 + a_4\sigma_1\sigma_3;\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Trong đó, $a_i (i = 1,2,...)$ là các hằng số được xác định duy nhất và để tìm các hệ số này ta cho *x, y, z* nhận các giá trị cụ thể nào đó, thiết lập hệ phương trình với ẩn là $a_i (i = 1,2,...)$ giải hệ phương trình ta tìm được a_i.

Ví dụ: Biểu diễn đa thức sau đây theo các đa thức đối xứng cơ bản .

$$f(x,y,z) = (x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2$$

Do $f(x,y,z)$ là đa thức thuần nhất bậc 6 nên theo mệnh đề trên ta có:

$$f(x,y,z) = a_1\sigma_1^6 + a_2\sigma_1^4\sigma_2 + a_3\sigma_1^2\sigma_2^2 + a_4\sigma_2^3 + a_5\sigma_1^3\sigma_3 + a_6\sigma_3^2 + a_7\sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

Nhận thấy rằng $f(x,y,z)$ có bậc cao nhất đối với từng biến là 4 nên ta có $a_1 = a_2 = 0$. Ta cho *(x,y,z)* lần lượt nhận các giá trị (0,1,-1), (0,1,1),(1,1,-2), (-1,1,1), (1,1,1) ta tìm được $a_3 = 1,\ a_4 = -4,\ a_5 = -4,\ a_6 = -27,\ a_7 = 18$. Vậy ta có kết quả $f(x,y,z) = \sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_2^3 - 4\sigma_1^3\sigma_3 - 27\sigma_3^2 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3$.

1.2.3. Đa thức phản đối xứng:

Định nghĩa 17: Đa thức phản đối xứng là đa thức thay đổi dấu khi thay đổi vị trí của hai biến bất kì.

Các đa thức $x-y$ và $(x-y)(y-z)(x-z)$ là các đa thức phản đối xứng.

Định lý 9: (Định lý Benzout) Giả sử $f(t)$ là các đa thức bậc $n \geq 1$. Khi đó số dư của phép chia đa thức $f(t)$ cho $t-a$ là $f(a)$.

Định lý 10: Mọi đa thức phản đối xứng hai biến $f(x,y)$ đều có dạng:

$$f(x,y)=(x-y)g(x,y). \qquad (1)$$

Trong đó, $g(x,y)$ là các đa thức đối xứng theo các biến x,y.

Chứng minh: Ta thấy rằng $f(x,y)$ là đa thức phản đối xứng thì $f(x,x)=0$, vì theo định nghĩa ta có:

$$f(x,y)=-f(y,x).$$

Đặt $y=x$ ta suy ra $f(x,x)=0$.

Ta kí hiệu $F_y(x)=f(x,y)$ là đa thức theo biến x (coi y là tham số). Theo nhận xét trên, ta có $F_y(y)=0$. Theo định lý Bezout, đa thức $F_y(x)$ chia hết cho $x-y$, do đó $f(x,y)$ chia hết cho $x-y$, tức là:

$$f(x,y)=(x-y)g(x,y).$$

Trong đó $g(x,y)$ là một đa thức nào đó. Ta đổi chỗ của x và y trong công thức (1) ta có:

$$f(y,x)=(y-x)g(y,x).$$

Theo giả thiết $f(x,y)=-f(y,x)$ và $x-y=-(y-x)$ suy ra

$$f(x,y)=(x-y)g(y,x). \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $g(x,y)$ là đa thức đối xứng theo các biến x, y.

Định lý 11: Mọi đa thức phản đối xứng ba biến $f(x,y,z)$ đều có dạng:

$$f(x,y,z) = (x-y)(y-z)(x-z)g(x,y,z).$$

Trong đó, $g(x,y,z)$ là đa thức đối xứng theo các biến *x, y, z*.

Định lý 11 được chứng minh tương tự như định lý 10. Trong đa thức phản đối xứng, các đa thức $x-y$ và $T=(x-y)(x-z)(y-z)$ đóng vai trò rất quan trọng và được gọi là các đa thức phản đối xứng đơn giản nhất tương ứng đối với đa thức đối xứng hai biến và ba biến .

Đối với đa thức phản đối xứng thuần nhất, ta có kết quả sau:

Mệnh đề 2: Cho $f_m(x,y,z)$ là một đa thức đối xứng thuần nhất bậc *m*. Khi đó

$$\begin{aligned}
&f_3(x,y,z) = aT(x,y,z);\\
&f_4(x,y,z) = aT(x,y,z)\sigma_1;\\
&f_5(x,y,z) = T(x,y,z)(a\sigma_1^2 + b\sigma_2);\\
&f_6(x,y,z) = T(x,y,z)(a\sigma_1^3 + b\sigma_1\sigma_2 + c\sigma_3);
\end{aligned}$$

Trong đó *a, b, c* là các hằng số.

1.3. Đa thức đối xứng *n* biến:

1.3.1. Các khái niệm cơ bản:

Định nghĩa 18: Giả sử $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$, đa thức $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_n)$ được hiểu là hàm số có dạng $f(x)=\sum_{k=0}^{m} M_k(x)$.

Trong
đó, $M_k(x)=M_k(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{j_1+...+j_n=k} a_{j_1...j_n} x^{j_1}x^{j_2}...x^{j_n}$; $\qquad j_i\in\mathbb{N},\ i=1,2,...,n$.

Định nghĩa 19: Đa thức $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_n)$ theo các biến $x_1,...,x_n$ được gọi là đối xứng nếu nó không thay đổi khi đổi chỗ giữa hai biến bất kỳ.

Định nghĩa 20: Đa thức $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_n)$ theo các biến $x_1,...,x_n$ được gọi là thuần nhất bậc *m* nếu $f(tx)=f(tx_1,tx_2,...,tx_n)=t^m f(x_1,x_2,...,x_n)=t^m f(x)$.

Kí hiệu $s_k = x_1^k + x_2^k + ... + x_n^k; k \in \mathbb{Z}$ được gọi là tổng lũy thừa và $\sigma_k = \sum_{\substack{i_1, i_2, ..., i_n = 1 \\ i_1 < i_2 < ... < i_n}}^{n} x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_k}$ là các đa thức đối xứng cơ bản của các biến $x_1, ..., x_n$.

Chẳng hạn, với $n = 4$ ta có:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4;$$
$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4;$$
$$\sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4.$$

Số các số hạng trong đa thức đối xứng bậc k bằng C_n^k.

Định nghĩa 21: Đa thức với số hạng tối thiểu, mỗi số hạng là một đơn thức có dạng

$x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}$ được gọi là quỹ đạo của đơn thức và được kí hiệu là $O\left(x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}\right)$.

Ví dụ với $n = 4$ ta có:

$O\left(x_1^2 x_2^3\right) = x_1^2x_2^3 + x_1^2x_3^3 + x_1^2x_4^3 + x_2^2x_1^3 + x_2^2x_3^3 + x_2^2x_4^3 + x_3^2x_1^3 + x_3^2x_2^3 + x_3^2x_4^3 + x_4^2x_1^3 + x_4^2x_2^3 + x_4^2x_3^3$

1.3.2. Biểu diễn các tổng lũy thừa qua các đa thức đối xứng cơ bản:

Định lý 12: (Công thức truy hồi Newton) Các tổng lũy thừa và các đa thức đối xứng cơ bản liên hệ với nhau theo công thức

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_1 s_{k-2} + \sigma_1 s_{k-3} - ... + (-1)^{k-1} k.\sigma_k;\ s_0 = k$$

1.3.3. Các định lý của đa thức đối xứng n biến:

Định lý 13: (Định lý tồn tại) Giả sử $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ là đa thức đối xứng của n biến. Khi đó, tồn tại đa thức $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ sao cho nếu thay $\sigma_1 = x_1 + x_2 + ... + x_n, \ldots, \sigma_n = x_1x_2....x_n$ thì ta nhận được đa thức $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Định lý 14: (Tính duy nhất) Nếu hai đa thức $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ và $\psi(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ sau khi thay $\sigma_1 = x_1 + x_2 + ... + x_n, \ldots, \sigma_n = x_1x_2....x_n$ cho ta cùng một đa thức đối xứng $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ thì $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \equiv \psi(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$.

Chương II: MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐA THỨC ĐỐI XỨNG ĐỂ GIẢI TOÁN SƠ CẤP

Việc giải các bài toán sơ cấp sẽ trở nên dễ dàng hơn nếu ta biết sử dụng tính đối xứng trong các giả thiết của bài toán. Qua các ví dụ cụ thể sau đây, chúng ta sẽ thấy được lý thuyết của đa thức đối xứng được áp dụng như thế nào để giải nhiều dạng bài toán của đại số sơ cấp.

2.1. Phân tích đa thức thành nhân tử:

Đối với một số bài toán phân tích đa thức thành nhân tử, ở đó đa thức cần phân tích là một đa thức đối xứng đối với các ẩn và biểu thức biểu diễn đa thức là tương đối phức tạp thì việc tách và nhóm các hạng tử chung là một việc làm khó đối với học sinh. Song nếu ta chuyển đa thức đó về các đa thức đối xứng cơ bản của các ẩn thì việc phân tích đa thức mới thành nhân tử sẽ đơn giản hơn.

Phương pháp thứ nhất biểu diễn đa thức đã cho theo các đa thức đối xứng cơ bản. Trong phương pháp này ta sử dụng công thức tổng lũy thừa được trình bày ở mục 1.1.2 và mục 1.2.2.

Ví dụ 1: *Phân tích đa thức sau thành nhân tử*

$$f(x,y) = 2x^4 + 7x^3y + 9x^2y^2 + 7xy^3 + 2y^4.$$

Giải:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2(x^4 + y^4) + 7xy(x^2 + y^2) + 9x^2y^2 \\ &= 2(\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2) + 7\sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + 9\sigma_2^2 \\ &= 2\sigma_1^4 - \sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_2^2 \end{aligned}$$

Đa thức trên là tam thức bậc hai theo σ_2 nên có hai nghiệm là: $\sigma_2 = -2\sigma_1^2$, $\sigma_2 = \sigma_1^2$ do đó

$$f(x,y) = (2\sigma_1^2 + \sigma_2)(\sigma_1^2 - \sigma_2) = (2x^2 + 2y^2 + 5xy)(x^2 + y^2 + xy).$$

Ví dụ 2: *Phân tích đa thức sau thành nhân tử*

$$f(x,y,z)=(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(x+z-y)^3-(x+y-z)^3.$$

Giải:

$$\begin{aligned}f(x,y,z)&=(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(x+z-y)^3-(x+y-z)^3\\&=\sigma_1^3-(\sigma-2x)^3-(\sigma-2y)^3-(\sigma-2z)^3\\&=-2\sigma_1^3+6\sigma_1^2(x+y+z)-12\sigma_1(x^2+y^2+z^2)+8(x^3+y^3+z^3)\\&=4\sigma_1^3-12\sigma_1 s_2+8s_3\end{aligned}$$

Thay $s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2$ và $s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$ vào biểu thức trên ta được

$$f(x,y,z)=4\sigma_1^3-12\sigma(\sigma_1^2-2\sigma_2)+8(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)=24\sigma_3=24xyz$$

Phương pháp thứ hai (phương pháp hệ số bất định): Khi biểu diễn đa thức đã cho theo các đa thức đối xứng cơ bản ta gặp phải các phương trình không có nghiệm thực. Vì vậy không thể phân tích đa thức đã cho thành nhân tử, sử dụng phương pháp hệ số bất định bằng cách cho *x, y, z* nhận các giá trị cụ thể để tìm các hệ số.

Ví dụ 3: *Phân tích đa thức sau thành nhân tử:*

$$f(x,y)=3x^4-8x^3y+14x^2y^2-8xy^3+3y^4.$$

Giải:

$$\begin{aligned}f(x,y)&=3(x^4+y^4)-8xy(x^2+y^2)+14x^2y^2\\&=3(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2)-8\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)+14\sigma_2^2\\&=3\sigma_1^4-20\sigma_1^2\sigma_2+36\sigma_2^2.\end{aligned}$$

Đây là một tam thức bậc hai theo σ_2 và không có nghiệm thực. Vì vậy ta không thể phân tích đa thức thành hai nhị thức theo σ_2, ta sử dụng phương pháp hệ số bất định để biểu diễn đa thức đã cho ở dạng:

$$\begin{aligned}f(x,y)&=3x^4-8x^3y+14x^2y^2-8xy^3+3y^4\\&=(Ax^2+Bxy+Cy^2)(Cx^2+Bxy+Ay^2).\qquad(*)\end{aligned}$$

Ta tìm các hệ số A, B, C bằng phương pháp hệ số bất định như sau:

Với $x = y = 1$, ta có $(A+B+C)^2 = 4 \Rightarrow A+B+C = \pm 2$.

Nhận thấy rằng đẳng thức (*) không thay đổi khi thay đổi dấu của tất cả các hệ số A, B, C thành ngược lại. Vì vậy, không mất tính tổng quát ta có $A+B+C = 2$.

Với $x = 1, y = -1$, ta có $(A-B+C)^2 = 36 \Rightarrow A-B+C = \pm 6$

Tiếp theo cho $x = 0, y = 1$ ta có $AC = 3$

Để xác định các hệ số A, B, C ta chỉ cần giải các hệ phương trình

$$\begin{cases} A+B+C=2 \\ A-B+C=6 \\ AC=3 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} A+B+C=2 \\ A-B+C=-6 \\ AC=3 \end{cases}$$

Hệ phương trình thứ nhất cho ta nghiệm $A=1, B=-2, C=3$. Hệ phương trình thứ hai không có nghiệm thực. vậy ta có kết quả

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 3x^4 - 8x^3y + 14x^2y^2 - 8xy^3 + 3y^4 \\ &= (x^2 - 2xy + 3y^2)(3x^2 - 2xy + y^2). \end{aligned}$$

Ví dụ 4: *Phân tích đa thức sau thành nhân tử*

$$f(x,y,z) = 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 - x^4 - y^4 - z^4.$$

Giải:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - (x^4 + y^4 + z^4) \\ &= 2O\left(x^2y^2\right) - s_4 \quad \left(\textit{thay } O\left(x^2y^2\right) = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3;\ s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3\right) \\ &= 2\left(\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3\right) - \left(\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3\right) \\ &= \sigma_1\left(-\sigma_1^3 + 4\sigma_1\sigma_2 - 8\sigma_3\right). \end{aligned}$$

Ta thấy đa thức trên là đa thức bậc bốn đối với σ_1 và chia hết cho σ_1. Hơn nữa, đa thức đã cho là hàm chẵn đối với x, y, z nên khi ta thay x bởi $-x$ (hoặc y bởi $-y$, hoặc z bởi $-z$) thì đa thức không thay đổi, do đó đa thức cũng chia hết cho $-x+y-z,\ x-y+z,\ x+y-z$. Vì đa thức đã cho là đa thức bậc bốn nên ta có:

$$f(x,y,z) = (x+y+z)(y+z-x)(x-y+z)(x+y-z).P.$$

Vì f là một đa thức bậc bốn nên P là một hằng số nào đó.

Hằng số P được xác định bằng phương pháp hệ số bất định, bằng cách cho $x = y = z = 1 \Rightarrow P = 1$

Vậy ta có kết quả $f(x,y,z) = (x+y+z)(y+z-x)(x-y+z)(x+y-z)$.

Ví dụ 5: *Rút gọn biểu thức*

$$M = \frac{a(b+c-a)^2 + b(a+c-b)^2 + c(a+b-c)^2 + (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{a^2(b+c-a) + b^2(a+c-b) + c^2(a+b-c) - (a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)}$$

Giải:

Ta thấy M là biểu thức đối xứng đối với *a, b, c*. Đặt A là tử số, B là mẫu số khi đó *A, B* là các đa thức đối xứng của *a, b, c*.

Khi cho $a = 0$ hoặc $b = 0$ $(c = 0)$ ta có $A = 0$ suy ra $A = f.abc$, trong đó f là một đa thức của *a, b, c*.

Mặt khác, ta có A là đa thức có bậc là 3 nên bậc của f bằng 0 hay f là một hằng số. Chọn $a = b = c = 1$ suy ra $f = 4$. Vậy $A = 4abc$.

Tương tự, ta tìm được $B = 2abc$. Từ đó suy ra $M = 2$.

Tương tự, như trường hợp 2 biến và 3 biến thì ta biểu diễn đa thức $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ theo các biến $\sigma_1, ..., \sigma_n$ bằng cách thay $\sigma_1 = x_1 + x_2 + ... + x_n, \dots, \sigma_n = x_1 x_2 .... x_n$, sau đó phân tích đa thức đa cho thành tích các biểu thức theo các biến $\sigma_1, ..., \sigma_n$, cuối cùng thay ngược lại $\sigma_1 = x_1 + x_2 + ... + x_n, \dots, \sigma_n = x_1 x_2 .... x_n$.

Ví dụ 6: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$$(b+c)^3+(a+c)^3+(a+b)^3+(a+d)^3+(b+d)^3+(c+d)^3.$$

Giải:

Đặt $f(a,b,c,d)=(b+c)^3+(a+c)^3+(a+b)^3+(a+d)^3+(b+d)^3+(c+d)^3$.

Ta thấy rằng f là đa thức đối xứng thuần nhất bậc 3 nên khi biểu diễn qua các đa thức đối xứng cơ bản của các biến *a, b, c, d* thì f có dạng:

$$f(a,b,c,d)=A\sigma_1^3+B\sigma_1\sigma_2+C\sigma_3 \quad (*)$$

Trong đó *A, B, C* là các hằng số. Để tìm *A, B, C* ta dùng phương pháp hệ số bất định.

a	b	c	d	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	2	1	0	0
0	1	1	-2	0	-3	-2	0

Thay vào (*) ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} A=3 \\ 8A+2B=12 \\ -2C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-6 \\ C=0 \end{cases}$$

Vậy $f(a,b,c,d)=3\sigma_1^3-6\sigma_1\sigma_2=3\sigma_1\left(\sigma_1^2-2\sigma_2\right)=3(a+b+c+d)\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)$.

Qua các ví dụ trên ta thấy rằng khi phân tích đa thức thành các nhân tử bằng cách dùng các đa thức đối xứng cơ bản ta cũng phải chú ý đến tính đối xứng của các ẩn, tính chẵn lẻ của các ẩn để suy ra các kết quả một cách nhanh hơn.

Một số bài tập đề nghị:

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1. $f(x,y)=(x+y)^5-x^5-y^5$.

2. $(x+y+z)^4-(y+z)^4-(x+z)^4-(x+y)^4+x^4+y^4+z^4$.

3. $f(x,y,z)=(x+y)^3+(y+z)^3+(x+z)^3-3(x+y)(y+z)(x+z)$.

4. $f(x,y,z,t)=x^2y^2(z-t)(x-y)+x^2z^2(t-y)(x-z)+x^2t^2(y-z)(x-t)+$

$$+y^2z^2(x-t)(y-z)+y^2t^2(z-x)(y-t)+z^2t^2(x-y)(z-t).$$

2.2. Phương trình hệ số đối xứng và phương trình hồi quy (phương trình thuận nghịch):

Đa thức đối xứng là công cụ hữu hiệu để giải các phương trình đại số bậc cao, đặc biệt là phương trình hệ số đối xứng và phương trình hồi quy.

Định nghĩa 22: Đa thức

$$f(z) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n; \ (a \neq 0).$$

được gọi là đa thức hệ số đối xứng nếu các hệ số cách đều hai đầu bằng nhau, nghĩa là:

$a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, a_2 = a_{n-2}, ...$

Phương trình của đa thức hệ số đối xứng được gọi là phương trình hệ số đối xứng.

Ví dụ: Các đa thức sau đây là đa thức hệ số đối xứng:

$$g(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1;$$
$$f(z) = z^6 - 2z^5 - 5z^4 + 12z^3 - 5z^2 - 2z + 1.$$

Định lý 15: Đa thức $f(z)$ bậc n là đa thức hệ số đối xứng khi và chỉ khi

$$z^n f\left(\frac{1}{z}\right) = f(z), \ z \neq 0.$$

Chứng minh:

♦ Phần thuận: Nếu $f(x)$ là đa thức đối xứng bậc n thì ta dễ dàng suy ra

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x), \ x \neq 0.$$

♦ Ngược lại: Giả sử $f(x)$ có dạng $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n; \ (a \neq 0)$

Với $x \neq 0$, thay x trong phương trình trên bằng $\frac{1}{x}$, ta được

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 .$$

Lại có $x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x),\ x \neq 0$ suy ra $a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, a_2 = a_{n-2}, \ldots$ hay $f(x)$ là đa thức hệ số đối xứng.

Định nghĩa 23: Các đa thức

$$a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + \ldots + a_{n-1}x^{n+1} + a_nx^n + \lambda a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \lambda^{n-1}a_1x + \lambda^n a_0.$$
$$a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \ldots + a_{n-1}x^{n+2} + a_nx^{n+1} + \lambda a_nx^n + \lambda^2 a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \lambda^{2n-1}a_1x + \lambda^{2n+1}a_0.$$

Trong đó, $a_0 \neq 0$ và $\lambda \neq 0$ được gọi là các đa thức hồi quy (đa thức thuận nghịch). Phương trình của đa thức hồi quy được gọi là phương trình hồi quy.

Khi $\lambda = 1$ thì đa thức hồi quy trở thành đa thức hệ số đối xứng.

Ví dụ: Phương trình $4x^6 + 5x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 9x^2 + 45x + 108 = 0$ là phương trình hồi quy với $\lambda = 3$, vì phương trình đã cho có thể viết dưới dạng:

$$4x^6 + 5x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 3.3x^2 + 5.3^2x + 4.3^3 = 0.$$

Định lý 16: Mọi đa thức hồi quy bậc chẵn *2n*

$$f(x) = a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + \ldots + a_{n-1}x^{n+1} + a_nx^n + \lambda a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \lambda^{n-1}a_1x + \lambda^n a_0$$

đều có thể biểu diễn ở dạng $f(x) = x^n h(\sigma)$, trong đó $\sigma = x + \frac{\lambda}{x}$ và $h(\sigma)$ là một đa thức vào đó theo biến σ và có bậc *n*.

Mọi đa thức hồi quy bậc lẻ đều có dạng $f(x) = (x+\lambda)g(x)$, trong đó *g(x)* là đa thức hồi quy bậc chẵn.

Cách giải phương trình hệ số đối xứng và phương trình hồi quy:

Nếu $f(x)$ là đa thức hệ số đối xứng (đa thức hồi quy) bậc chẵn thì ta xét nếu $x=0$ không là nghiệm thì ta chia hai vế của phương trình cho x^n. Sau khi chia hai vế của phương trình cho x^n ta được phương trình dạng

$f(x)=a_0\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)+a_1\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)+...+a_{n-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)+a_n; (a\neq 0)$ phương trình hệ số đối xứng.

$f(x)=a_0\left(x^n+\frac{\lambda^n}{x^n}\right)+a_1\left(x^{n-1}+\frac{\lambda^{n-1}}{x^{n-1}}\right)+...+a_{n-1}\left(x+\frac{\lambda}{x}\right)+a_n; (a\neq 0)$ phương trình hồi quy.

Đây là phương trình đối xứng với x và $\frac{1}{x}\left(\frac{\lambda}{x}\right)$. Bằng cách đặt $y=\frac{1}{x}\left(y=\frac{\lambda}{x}\right)$, ta đưa phương trình về dạng

$$f(x,y)=a_0\left(x^n+y^n\right)+a_1\left(x^{n-1}+y^{n-1}\right)+...+a_{n-1}\left(x+y\right)+a_n; (a\neq 0)$$

Ta thấy đây là phương trình đối xứng theo các biến *x, y* khi đó ta có

$\sigma_1=x+y=x+\frac{1}{x}\left(\sigma_1=x+\frac{\lambda}{x}\right)$, $\sigma_2=xy=1\left(\sigma_2=\lambda\right)$ và $s_k=x^k+y^k$. Bằng cách sử dụng định lý 1(công thức Newton) biểu diễn đa thức đã cho theo các đa thức đối xứng cơ bản σ_1,σ_2 sau đó giải tìm nghiệm của phương trình đã cho.

Như vậy, bằng cách trên ta đưa phương trình hệ số đối xứng (phương trình hồi quy) về dạng phương trình đối xứng để giải.

Ví dụ 7: Giải phương trình

$$2x^8-9x^7+20x^6-33x^5+46x^4-66x^3+80x^2-72x+32=0.$$

Giải:

Đây là phương trình hồi quy với $\lambda=2$ vì có thể biểu diễn phương trình dưới dạng

$$2x^8-9x^7+20x^6-33x^5+46x^4-33.2x^3+20.2^2x^2-9.2^3x+2.2^4=0.$$

Ta có $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia hai vế của phương trình cho x^4 ta được

$$2\left(x^4+\frac{16}{x^4}\right)-9\left(x^3+\frac{8}{x^3}\right)+20\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-33\left(x+\frac{2}{x}\right)+46=0$$

Đặt $y=\frac{2}{x}$ phương trình trở thành

$$2\left(x^4+y^4\right)-9\left(x^3+y^3\right)+20\left(x^2+y^2\right)-33(x+y)+46=0 \quad (*)$$

Ta thấy rằng (*) là phương trình đối xứng theo các biến *x, y*.

Sử dụng các công thức $x+y=\sigma_1;\ xy=2=\sigma_2,\ x^2+y^2=s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2=\sigma_1^2-4$,

$x^3+y^3=s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=\sigma_1^3-6\sigma_1,\ x^4+y^4=s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2=\sigma_1^4-8\sigma_1^2+8$

Ta đưa phương trình trên về dạng:

$$2\sigma_1^4-9\sigma_1^3+4\sigma_1^2+21\sigma_1-18=0.$$

Nghiệm của phương trình này là $\sigma_1=1;\ \sigma_1=2;\ \sigma_1=3;\ \sigma_1=\frac{-3}{2}$ vì

$x+y=\sigma_1=x+\frac{2}{x}\Rightarrow|\sigma_1|\geq 2\sqrt{2}$ nên ta chỉ nhận giá trị $\sigma_1=3$

Do đó, để tìm nghiệm của phương trình đã cho ta giải phương trình sau:

$$x+y=x+\frac{2}{x}=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$$

Từ các phương trình trên ta tìm được các giá trị của *x* là $x=1;\ x=2$.

Ví dụ 8: *Giải phương trình*

$$2x^{11}+7x^{10}+15x^9+14x^8-16x^7-22x^6-22x^5-16x^4+14x^3+15x^2+7x+2=0.$$

Giải:

Đây là phương trình hệ số đối xứng bậc lẻ nên có thể đưa phương trình về dạng

$$(x+1)\left(2x^{10}+5x^9+10x^8+4x^7-20x^6-2x^5-20x^4+4x^3+10x^2+5x+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ 2x^{10}+5x^9+10x^8+4x^7-20x^6-2x^5-20x^4+4x^3+10x^2+5x+2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ 2x^{10}+5x^9+10x^8+4x^7-20x^6-2x^5-20x^4+4x^3+10x^2+5x+2=0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Phương trình (*) là phương trình hệ số đối xứng bậc 10. Ta có $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia hai vế của phương trình cho x^5 và biến đổi phương trình về dạng:

$$2\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)+5\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+10\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-20\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0$$

Đặt $y=\dfrac{1}{x}$, khi đó phương trình trở thành

$$2\left(x^5+y^5\right)+5\left(x^4+y^4\right)+10\left(x^3+y^3\right)+4\left(x^2+y^2\right)-20(x+y)-2=0.$$

Ta được phương trình đối xứng có bậc là 5 với các biến *x, y*. Sử dụng các công thức

$x+y=\sigma_1;\ xy=\sigma_2=1;\ x^2+y^2=s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2=\sigma_1^2-2;\ x^3+y^3=s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=\sigma_1^3-3\sigma_1$
$x^4+y^4=s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2=\sigma_1^4-4\sigma_1^2+2;\ x^5+y^5=s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2=\sigma_1^5-5\sigma$
ta đưa phương trình trên về dạng

$$2\sigma_1^5+5\sigma_1^4-16\sigma_1^2-40\sigma_1=0 \Leftrightarrow \sigma_1\left(2\sigma_1+5\right)\left(\sigma_1^3-8\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sigma_1=0 \\ 2\sigma_1+5=0 \\ \sigma_1^3-8=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sigma_1=0 \\ \sigma_1=\dfrac{-5}{2} \\ \sigma_1=2 \end{array}\right.$$

Vì $x+y=\sigma_1=x+\dfrac{1}{x}\Rightarrow|\sigma_1|\geq 2$ nên ta chỉ nhận hai giá trị $\sigma_1=\dfrac{-5}{2};\ \sigma_1=2$. Do đó, để tìm nghiệm của phương trình đã cho ta giải các phương trình $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{-5}{2};\ x+\dfrac{1}{x}=2$.

Từ các phương trình trên ta tìm được các giá trị x là nghiệm của phương trình đã cho là: $x=-2;\ x=\dfrac{-1}{2};\ x=1$

Bài tập đề nghị: *Giải các phương trình sau*

1. $9z^6-18z^5-73z^4+164z^3-73z^2-18z+9=0$
2. $x^7-4x^6+2x^5+3x^4+3x^3+2x^2-4x+1=0$

2.3. Chứng minh đẳng thức:

Để chứng minh các đẳng thức trong đó vế phải, vế trái của đẳng thức là các đa thức đối xứng và các điều kiện kèm theo của các biến cũng có tính chất đối xứng, ta biểu diễn các biểu thức trong đẳng thức và trong các điều kiện theo các đa thức đối xứng cơ bản $\sigma_1,\sigma_2,...$ và chứng minh đẳng thức với $\sigma_1,\sigma_2,...$

Ví dụ 9: *Chứng minh đồng nhất thức:*

$$(x+y)^7-x^7-y^7=7xy(x+y)\left(x^2+xy+y^2\right)^2.$$

Giải:

Theo công thức Newton ta có:

$$\begin{aligned}(x+y)^7-x^7-y^7=\sigma_1^7-s_7&=\sigma_1^7-\left(\sigma_1^7-7\sigma_1^5\sigma_2+14\sigma_1^3\sigma_1^2-7\sigma_1\sigma_2^3\right)\\&=7\sigma_1^5\sigma_2+14\sigma_1^3\sigma_1^2-7\sigma_1\sigma_2^3\\&=7\sigma_1\sigma_2\left(\sigma_1^4-2\sigma_1^2\sigma_2+\sigma_2^2\right)\\&=7\sigma_1\sigma_2\left(\sigma_1^2-\sigma_2\right)^2\\&=7xy(x+y)\left(x^2+xy+y^2\right)^2\end{aligned}$$

Vậy ta có điều cần chứng minh.

Ví dụ 10: Cho $x+y=1; x^3+y^3=a; x^5+y^5=b$. Chứng minh rằng

$$5a(a+1)=9b+1.$$

Giải:

Đặt $\sigma_1=x+y=1; \sigma_2=xy$. Ta có: $x^3+y^3=a \Leftrightarrow s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=a \Rightarrow \sigma_2=\dfrac{1-a}{3}$

Vì $x^5+y^5=b \Leftrightarrow s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2=b$

Nên $b=1-5\dfrac{1-a}{3}+5\dfrac{(1-a)^2}{9}$ hay $5a(a+1)=9b+1$.

Ví dụ 11: *Chứng minh rằng:*

Nếu $x+y+z=xy+yz+zx=0$ *thì* $3\left(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3\right)=\left(x^3+y^3+z^3\right)^2$.

Giải:

Sử dụng công thức tổng lũy thừa đối với 3 biến và công thức quỹ đạo, khai triển vế phải với điều kiện của đề bài $\sigma_1=\sigma_2=0$, ta có:

$$3\left(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3\right)=3O\left(x^3y^3\right)=3\left(\sigma_2^3+3\sigma_3^2-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3\right)=9\sigma_3^2$$

Tương tự với vế trái ta có:

$$\left(x^3+y^3+z^3\right)^2=s_3^2=\left(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3\right)^2=9\sigma_3^2$$

Vậy $3\left(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3\right)=\left(x^3+y^3+z^3\right)^2$ (đpcm).

Ví dụ 12: Chứng minh rằng, nếu các số thực *x, y, z, a, b, c* thỏa mãn các hệ thức

$$\begin{cases} x+y+z=a+b+c \\ x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2 \\ x^3+y^3+z^3=a^3+b^3+c^3 \end{cases}$$

thì với mọi số tự nhiên *n*: $x^n+y^n+z^n=a^n+b^n+c^n$

Giải:

Kí hiệu $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ là các đa thức đối xứng cơ bản theo các biến *x, y, z*; còn $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ là các đa thức đối xứng cơ bản theo các biến *a, b, c*. Sử dụng công thức Newton, theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases}\sigma_1=\omega_1\\ \sigma_1^2-2\sigma_2=\omega_1^2-2\omega_2\\ \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=\omega_1^3-3\omega_1\omega_2+3\omega_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sigma_1=\omega_1\\ \sigma_2=\omega_2\\ \sigma_3=\omega_3\end{cases}$$

Khi đó, với mọi φ ta có $\varphi(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=\varphi(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$

Giả sử $f(x,y,z)$ là một đa thức đối xứng và theo định lý duy nhất ta có $f(x,y,z)=\varphi(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$; $f(a,b,c)=\varphi(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$. Từ đó suy ra $f(x,y,z)=f(a,b,c)$

Trong trường hợp riêng, ta có: $x^n+y^n+z^n=a^n+b^n+c^n$; $\forall n\in\mathbb{N}$.

Ví dụ 13: *Chứng minh rằng nếu* $a+b+c+d=0$ *thì*

$$a^4+b^4+c^4+d^4=2(ab-cd)^2+2(ac-bd)^2+2(ad-bc)^2+4abcd.$$

Giải:

Theo giả thiết ta có $\sigma_1=a+b+c+d=0$ nên ta có

$$a^4+b^4+c^4+d^4=s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4=2\sigma_2^2-4\sigma_4\ (*)$$

Mặt khác, ta có:

$$\begin{aligned}2(ab-cd)^2+2(ac-bd)^2+2(ad-bc)^2+4abcd&=2\left[O(a^2b^2)-6\sigma_4\right]+4\sigma_4=2O(a^2b^2)-8\sigma_4\\&=(s_2^2-s_4)-8\sigma_4\\&=(\sigma_1^2-2\sigma_2)-(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4)-8\sigma_4\\&=2\sigma_2^2-4\sigma_4\ (**)\end{aligned}$$

Từ (*) và (**) suy ra

$$a^4+b^4+c^4+d^4=2(ab-cd)^2+2(ac-bd)^2+2(ad-bc)^2+4abcd.\ \text{(đpcm)}$$

Bài tập đề nghị:

1. *Chứng minh rằng nếu* $a+b+c=0$ *thì các đẳng thức sau đây đúng:*

   $a).\ a^3+b^3+c^3=3abc.$

   $b).\ a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)=0.$

   $c).\ a^2(b+c)^2+b^2(a+c)^2+c^2(a+b)^2+(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)=0.$

   $d).\ a^3+b^3+c^3=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2.$

   $e).\ \frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}.\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=abc.\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$

2. *Chứng minh đồng nhất thức:*

$$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3-3(a-b)(b-c)(c-a)=0.$$

3. *Chứng minh rằng nếu* $a+b+c+d=0$ *thì các đẳng thức sau đúng:*

   $a).\ (a^3+b^3+c^3+d^3)^2=9(abc+abd+acd+bcd)^2.$

   $b).\ a^4+b^4+c^4+d^4=2(ab-cd)^2+2(ac-bd)^2+2(ad-bc)^2+4abcd.$

2.4. Chứng minh bất đẳng thức:

2.4.1. Trường hợp hai biến:

Ta có thể sử dụng các tính chất của đa thức đối xứng để chứng minh nhiều bất đẳng thức. Cơ sở của phương pháp này là các chú ý sau.

Giả sử $\sigma_1,\sigma_2\in\mathbb{R}$ để tồn tại $x,y\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $x+y=\sigma_1;\ xy=\sigma_2$ thì điều kiện cần và đủ là $\Delta=\sigma_1^2-4\sigma_2\geq 0$; ngoài ra $x=y\Leftrightarrow\Delta=0$.

Muốn cho *x, y* là số thực không âm thì điều kiện cần và đủ là $\Delta>0;\ \sigma_1,\sigma_2>0$.

Giả sử đã cho một đa thức đối xứng *f(x,y)* ta phải chứng minh rằng đa thức $f(x,y)\geq 0\ \ (f(x,y)>0, f(x,y)<0, f(x,y)\leq 0)$ với những giá trị thực *x, y* thỏa mãn một điều kiện nào đó. Muốn vậy, trước hết ta biểu diễn $f(x,y)$ qua σ_1,σ_2. Rồi trong đa thức tìm được ta biểu diễn σ_2 qua σ_1 và $\Delta=\sigma_1^2-4\sigma_2\geq 0$, tức là ta đặt $\sigma_2=\frac{1}{4}(\sigma_1^2-\Delta)$.

Kết quả ta thu được một đa thức của σ_1 và Δ và ta phải chứng minh rằng với những giá trị không âm của Δ và những điều kiện đã cho về σ_1 thì bất đẳng thức đã cho là đúng.

Ví dụ 14: *Chứng minh rằng nếu a, b là những số thực thỏa mãn $a+b\geq c$ và $c\geq 0$ thì ta có các bất đẳng thức:*

$$a^2+b^2\geq\frac{c^2}{2},\ a^4+b^4\geq\frac{c^4}{8},\ a^8+b^8\geq\frac{c^8}{128}.$$

Giải: Đặt $a+b=\sigma_1, ab=\sigma_2$ điều kiện $\Delta=\sigma_1^2-4\sigma_2\geq 0$ ta có:

$$a^2+b^2=s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2=\sigma_1^2-2.\frac{1}{4}\left(\sigma_1^2-\Delta\right)=\frac{1}{2}\sigma_1^2+\frac{1}{2}\Delta$$

Vì $\Delta\geq 0$ và theo giả thiết $\sigma_1\geq c\geq 0$, nên $s_2\geq\frac{1}{2}c^2$, nghĩa là $a^2+b^2\geq\frac{c^2}{2}$.

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$a^2+b^2\geq 2|ab|\Rightarrow 2|ab|\geq\frac{c^2}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số a^4 và b^4, ta có:

$$a^4+b^4=\left(a^2\right)^2+\left(b^2\right)^2\geq 2a^2b^2\geq\frac{c^4}{8}.$$

Tương tự, ta dễ dàng chứng minh được $a^8+b^8\geq\frac{c^8}{128}$.

Các đẳng thức trên xảy ra khi $a=b=\frac{c}{2}$

Bằng quy nạp ta thu được kết quả sau: nếu $a+b\geq c\geq 0$ và n là một số tự nhiên bất kì thì ta có:

$$a^{2n}+b^{2n}\geq\frac{1}{2^{2n-1}}c^{2n}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=\frac{c}{2}$

Lưu ý: Khi cho c nhận các giá trị thực khác nhau, ta nhận được các bài toán khác nhau. Chẳng hạn cho $c=1$, ta có bài toán

Chứng minh rằng, nếu a, b là các số thực thỏa mãn điều kiện $a+b\geq 1$ thì

$$a^2+b^2\geq\frac{1}{4},\ a^4+b^4\geq\frac{1}{8},\ a^8+b^8\geq\frac{1}{128}$$

Nhận xét: Ta có $\sin^2x+\cos^2x=1$. Áp dụng kết quả trên với $a=\sin^2x;\ b=\cos^2x;\ c=1$

ta được $\sin^{4n}x+\cos^{4n}x\geq\frac{1}{2^{2n-1}}\ \left(n\in\mathbb{Z}^+\right)$

Ví dụ 15: *Cho a, b là những số thực không âm, chứng minh các bất đẳng thức sau:*

$$a.\ \sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

$$b.\ \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^8\geq 64ab\left(a+b\right)^2.$$

Giải:

a) Đặt $\sqrt{a}=u,\ \sqrt{b}=v$. Khi đó, bất đẳng thức đã cho trở thành

$$\frac{u^2}{v}+\frac{v^2}{u}\geq u+v\ \text{hay}\ u^3+v^3\geq uv\left(u+v\right).$$

Từ giả thiết ta có $u\geq 0,\ v\geq 0$ đặt $\sigma_1=u+v,\ \sigma_2=uv$ khi đó $\sigma_1\geq 0;\ \Delta=\sigma_1^2-4\sigma_2\geq 0$.

Vậy

$$u^3+v^3-uv\left(u+v\right)=s_3-\sigma_1\sigma_2=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2-\sigma_1\sigma_2=\sigma_1^3-4\sigma_1\sigma_2=\sigma_1\left(\sigma_1^2-4\sigma_2\right)\geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối luôn luôn đúng nên bất đẳng thức ban đầu được chứng minh.

b) Tương tự, ta cũng đặt $\sqrt{a}=u,\ \sqrt{b}=v$. Khi đó, bất đẳng thức đã cho trở thành

$$\left(u+v\right)^8\geq 64u^2v^2\left(u^2+v^2\right)^2.$$

Từ giả thiết ta có $u \ge 0, v \ge 0$ đặt $\sigma_1 = u + v, \sigma_2 = uv$, khi đó $\sigma_1 \ge 0; \Delta = \sigma_1^2 - 4\sigma_2 \ge 0$.

Suy ra $\sigma_2 = \frac{1}{4}\left(\sigma_1^2 - \Delta\right)$.

Bất đẳng thức trên trở thành: $(u+v)^4 \ge 8uv\left(u^2+v^2\right)$.

Ta có:

$$\begin{aligned}(u+v)^4 - 8uv\left(u^2+v^2\right) = \sigma_1^4 - 8\sigma_2.s_2 &= \sigma_1^4 - 8\sigma_2\left(\sigma_1^2 - 2\sigma_2\right)\\ &= \sigma_1^4 - 8\sigma_1^2\sigma_2 + 16\sigma_2^2\\ &= \sigma_1^4 - 8\sigma_1^2.\frac{1}{4}\left(\sigma_1^2 - \Delta\right) + 16.\frac{1}{16}\left(\sigma_1^2 - \Delta\right)^2 = \Delta^2 \ge 0.\end{aligned}$$

Ví dụ 16: *Cho x, y là nghiệm của hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2k^2 \\ xy + yz + zx = k^2 \end{cases} \quad (k > 0)$$

Chứng minh rằng $\frac{-4k}{3} \le x, y, z \le \frac{4k}{3}$.

Giải:

Hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2k^2 - z^2 \\ xy = k^2 - z(x+y) \end{cases}$

Đặt $x + y = \sigma_1, xy = \sigma_2$ điều kiện $\Delta = \sigma_1^2 - 4\sigma_2 \ge 0$ ta có: $x^2 + y^2 = s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$. Do đó

$$\text{Hệ phương trình đã cho} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 2k^2 - z^2 \\ \sigma_2 = k^2 - z\sigma_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1^2 - 2z\sigma_2 - 4k^2 + z^2 = 0 \\ \sigma_2 = k^2 - z\sigma_1 \end{cases}$$

Phương trình $\sigma_1^2 - 2z\sigma_2 - 4k^2 + z^2 = 0$ có $\Delta' = 4k^2 \ge 0$ nên có hai nghiệm là $\sigma_1 = -z \pm 2k$.

Với $\sigma_1 = -z + 2k \Rightarrow \sigma_2 = k^2 - z\sigma_1 = k^2 - z(2k - z) = (k - z)^2 \ge 0$.

Từ điều kiện, ta có: $\sigma_1^2 - 4\sigma_2 \geq 0 \Leftrightarrow (-z+2k)^2 - 4(k-z)^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow z(4k-3z) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq z \leq \frac{4k}{3}. \ (do\ k > 0) \quad (*)$$

Với $\sigma_1 = -z - 2k \Rightarrow \sigma_2 = k^2 - z\sigma_1 = k^2 - z(-2k-z) = (k+z)^2 \geq 0$.

Từ điều kiện, ta có:

$$\sigma_1^2 - 4\sigma_2 \geq 0 \Leftrightarrow (-z-2k)^2 - 4(k+z)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -z(4k+3z) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4k}{3} \leq z \leq 0. \qquad (**)$$

Kết hợp (*) và (**) ta được $\frac{-4k}{3} \leq z \leq \frac{4k}{3}$.

Do vai trò của *x, y, z* là như nhau nên ta cũng có $\frac{-4k}{3} \leq x, y \leq \frac{4k}{3}$.

Vậy $\frac{-4k}{3} \leq x, y, z \leq \frac{4k}{3}$ (đpcm).

2.4.2. Trường hợp ba biến:

Cho *x, y, z* là những số thực bất kỳ ta đặt $\Delta = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Ta thấy Δ là đa thức đối xứng với *x, y, z* và ta có:

$$\begin{aligned}\Delta &= 2(x^2+y^2+z^2) - 2(xy+yz+zx) \\ &= 2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - 2\sigma_2 \\ &= 2\sigma_1^2 - 6\sigma_2 \geq 0\end{aligned}$$

Vậy $\sigma_1^2 \geq 3\sigma_2$. (1)

Ta có thể sử dụng hệ thức (1) để chứng minh một số bất đẳng thức khác.

Ví dụ 17: *Chứng minh rằng với* $a,b,c>0$ *ta có:*

$$a).\ (ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c)$$
$$b).\ (a+b+c)(ab+bc+ca) \ge 9abc$$

Giải:

a). Theo (1) ta có $(x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx);\ x,y,z\in\mathbb{R}$. Thay $x=ab, y=bc, z=ca$ ta được

$$(ab+bc+ca)^2 \ge 3(a^2bc+ab^2c+abc^2) = 3abc(a+b+c)\ (*)\ \text{(đpcm).}$$

b). Do $a,b,c>0 \Rightarrow \sigma_1,\sigma_2,\sigma_3>0$. Ta có thể nhân vế theo vế của bất đẳng thức (1) với (*) ta được $\sigma_1^2\sigma_2^2 \ge 9\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \Leftrightarrow \sigma_1\sigma_2 \ge 3\sigma_3$ hay $(a+b+c)(ab+bc+ca)\ge 9abc$.

Ví dụ 18: *Cho* $a^2+b^2+c^2=0$. *Chứng minh rằng* $\left|a^3+b^3+c^3-3abc\right| \le 1$ (*)

Giải:

Đặt $\sigma_1=a+b+c;\ \sigma_2=ab+bc+ca;\ \sigma_3=abc$. Ta có:

$$a^2+b^2+c^2=s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2=1 \Rightarrow \sigma_2=\frac{\sigma_1^2-1}{2}.$$

Do $\sigma_1^2 \ge 3\sigma_2$ nên $\sigma_1^2 \ge 3.\dfrac{\sigma_1^2-1}{2} \Leftrightarrow \sigma_1^2 \le 3 \Leftrightarrow |\sigma_1| \le \sqrt{3}$.

Lại có $a^3+b^3+c^3=s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$.

Đặt $M=a^3+b^3+c^3-3abc$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}M=a^3+b^3+c^3-3abc &= \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3-3\sigma_3\\ &= \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2\\ &= \sigma_1^3-3\sigma_1.\frac{\sigma_1^2-1}{2}\\ &= \frac{-\sigma_1^3+3\sigma_1}{2}.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức (*) tương đương với $\left|\dfrac{-\sigma_1^3+3\sigma_1}{2}\right|\le 1$ với $|\sigma_1|\le\sqrt{3}$ hay $\sigma_1\in\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$.

Xét đa thức $f(x)=\dfrac{-x^3+3x}{2}$ với $x\in\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{-3x^2+3}{2}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$	0	$-$		
$f(x)$		0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	

Từ bảng biến thiên ta thấy $-1\le f(x)\le 1\Leftrightarrow |f(x)|\le 1\Leftrightarrow\left|\dfrac{-x^3+3x}{2}\right|\le 1$ với $x\in\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$.

Vậy $\left|\dfrac{-\sigma_1^3+3\sigma_1}{2}\right|\le 1$ với $\sigma_1\in\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$ (đpcm).

Ví dụ 19: *Cho* $\begin{cases}a,b,c>0\\ a+b+c\le k\end{cases}$, *chứng minh rằng* $\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\left(1+\dfrac{1}{c}\right)\ge\left(1+\dfrac{3}{k}\right)^3$.

Giải:

Đặt $x=\dfrac{1}{a};y=\dfrac{1}{b};z=\dfrac{1}{c}$. Bài toán đã cho tương đương:

Cho $\begin{cases}x,y,z>0\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\le k\end{cases}$, *chứng minh rằng* $(1+x)(1+y)(1+z)\ge\left(1+\dfrac{3}{k}\right)^2$.

Đặt $\sigma_1 = x+y+z;\ \sigma_2 = xy+yz+zx; \sigma_3 = xyz$, khi đó ta có $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3 > 0$ và

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \le k \Leftrightarrow \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \le k \Leftrightarrow \sigma_2 \le k\sigma_3.$$

Ta có:

$$(1+x)(1+y)(1+z) = 1+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số *x, y, z* ta có:

$$x+y+z \ge 3\sqrt[3]{xyz} \text{ hay } \sigma_1 \ge 3\sqrt[3]{\sigma_3}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số *xy, yz, zx* ta có:

$$xy+yz+zx \ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \text{ hay } \sigma_2 \ge 3\sqrt[3]{\sigma_3^2}.$$

Suy ra $1+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3 \ge 1+3\sqrt[3]{\sigma_3}+3\sqrt[3]{\sigma_3^2}+\sigma_3 = \left(1+\sqrt[3]{\sigma_3}\right)^3$.

Theo giải thiết, ta có:

$$k\sigma_3 \ge \sigma_2 \ge 3\sqrt[3]{\sigma_3^2} \Rightarrow \sqrt[3]{\sigma_3} \ge \frac{3}{k} \Rightarrow \left(1+\sqrt[3]{\sigma_3}\right)^3 \ge \left(1+\frac{3}{k}\right)^3.$$

Vậy $(1+x)(1+y)(1+z) = 1+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3 \ge \left(1+\frac{3}{k}\right)^3$ hay $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \ge \left(1+\frac{3}{k}\right)^3$.

- Áp dụng kết quả trên với $a=\sin A, b=\sin B, c=\sin C$ với *A, B, C* là ba góc của một tam giác, ta có:

$$\begin{cases} \sin A+\sin B+\sin C \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \\ \sin A.\sin B.\sin C > 0 \end{cases}$$

Suy ra $\left(1+\frac{1}{\sin A}\right)\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)\left(1+\frac{1}{\sin C}\right) \ge \left(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3$.

Bài tập đề nghị:

1.Cho $a, b \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$i).\ 8\left(a^4+b^4\right) \geq (a+b)^4$$
$$ii).\ a^6+b^6 \geq a^5b+ab^5$$

2.Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác, S là diện tích của tam giác, chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$a).\ 2(ab+bc+ca) > a^2+b^2+c^2$$
$$b).\ \left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c) > 2\left(a^3+b^3+c^3\right)$$
$$c).\ a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

2.5. Tìm nghiệm nguyên của phương trình và hệ phương trình đối xứng:

Để giải các bài toán tìm nghiệm nguyên của các phương trình, hệ phương trình đối xứng ta biểu diễn phương trình, hệ phương trình đã cho theo các đa thức đối xứng cơ bản $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, ...$ kết hợp với một số điều kiện của $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, ...$ ta tìm được các giá trị cụ thể của $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, ...$ Khi đó $x, y, z, ...$ là nghiệm nguyên của phương trình (nếu có):

$$t^n - \sigma_1 t^{n-1} + ... + (-1)^n.\sigma_n = 0, \quad n \geq 2$$

Ví dụ 20: *Tìm nghiệm nguyên của phương trình* $x^3+y^3+1=3xy$.

Giải:

Đặt $\sigma_1 = x+y, \sigma_2 = xy$, phương trình đã cho trở thành:

$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 1 = \sigma_2 \Leftrightarrow (\sigma_1+1)\left(\sigma_1^2 - \sigma_1 + 1 - 3\sigma_2\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sigma_1 + 1 = 0 & (*) \\ \sigma_1^2 - \sigma_1 + 1 - 3\sigma_2 = 0 & (**) \end{array}\right.$$

- $\sigma_1 + 1 = 0 \Leftrightarrow x+y=1$ phương trình có vô số nghiệm nguyên có dạng $(x \in \mathbb{Z}, y = -1-x)$.

▪ $\sigma_1^2-\sigma_1+1-3\sigma_2=0$. Ta viết phương trình này dưới dạng $\sigma_1^2-\sigma_1+1=3\sigma_2$.

Từ việc đặt $\sigma_1=x+y, \sigma_2=xy$ thì điều kiện tồn tại hai số *x, y* là $\sigma_1^2\geq 4\sigma_2$. Sử dụng điều kiện này ta có:

$$\begin{aligned}\sigma_1^2-\sigma_1+1\leq\frac{3}{4}\sigma_1^2&\Leftrightarrow\sigma_1^2-4\sigma_1+4\leq 0\\&\Leftrightarrow(\sigma_1-2)^2\leq 0\\&\Leftrightarrow\sigma_1=2\Rightarrow\sigma_2=1\end{aligned}$$

Khi đó, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}x+y=2\\xy=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}; \begin{cases}x\in\mathbb{Z}\\y=-1-x\end{cases}.$

Ví dụ 21: *Tìm nghiệm nguyên của phương trình:*

$$x+y=x^2+y^2-xy.$$

Giải:

Đặt $\sigma_1=x+y, \sigma_2=xy$, phương trình đã cho trở thành:

$$\sigma_1^2-\sigma_1=3\sigma_2\Leftrightarrow(2\sigma_1-1)^2=12\sigma_2+1\ (*)$$

Từ việc đặt $\sigma_1=x+y, \sigma_2=xy$, ta có điều kiện tồn tại hai số *x, y* là $\sigma_1^2\geq 4\sigma_2$.

Suy ra $\sigma_1^2-\sigma_1\leq\frac{3}{4}\sigma_1^2\Leftrightarrow\sigma_1^2-4\sigma_1\leq 0\Leftrightarrow 0\leq\sigma_1\leq 4\ (**)$

Từ (*) và (**) ta có hệ phương trình $\begin{cases}(2\sigma_1-1)^2=12\sigma_2+1\\0\leq\sigma_1\leq 4\end{cases}$

Giải hệ phương trình trên ta tìm được các nghiệm nguyên

$$\begin{cases}\sigma_1=0\\\sigma_2=0\end{cases}; \begin{cases}\sigma_1=1\\\sigma_2=0\end{cases}; \begin{cases}\sigma_1=3\\\sigma_2=2\end{cases}; \begin{cases}\sigma_1=4\\\sigma_2=4\end{cases}$$

Thay $x+y=\sigma_1$, $xy=\sigma_2$ ta tìm được các nghiệm nguyên của phương trình đã cho là

$$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases};\ \begin{cases}x=0\\y=1\end{cases};\ \begin{cases}x=1\\y=0\end{cases};\ \begin{cases}x=1\\y=2\end{cases};\ \begin{cases}x=2\\y=1\end{cases};\ \begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm nguyên là (0,0); (0,1); (1,0); (1,2); (2,1); (2,2).

Ví dụ 22: *Tìm các số nguyên x, y, z sao cho*

$$\begin{cases}x+y+z=6\\x^2+y^2+z^2=36\\xyz=6\end{cases}$$

Giải:

Đặt $\sigma_1=x+y+z$, $\sigma_2=xy+yz+zx$; $\sigma_3=xyz$,

Ta có $x^3+y^3+z^3=s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_2$.

Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases}\sigma_1=6\\\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_2=36\\\sigma_3=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sigma_1=6\\\sigma_2=11\\\sigma_3=6\end{cases}$$

Từ đó, ta có *x, y, z* là nghiệm nguyên của phương trình

$$t^3-\sigma_1t^2+\sigma_2t-\sigma_3=0\Leftrightarrow t^3-6t^2+11t-6=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=2\\t=3\end{array}\right.$$

Vậy các số nguyên cần tìm là 1, 2, 3.

Bài tập đề nghị:

1. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình* $x^3+y^3-2(x+y)=0$.

2. *Chứng minh rằng phương trình* $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}=1$ *không có nghiệm nguyên dương.*

2.6. Một số phương trình và hệ phương trình đối xứng ở phổ thông:

2.6.1. Một số phương trình đối xứng với hai biểu thức:

Trong mục này chúng ta chỉ xét các phương trình đối xứng đối với hai đại lượng mà tổng và tích của chúng (σ_1,σ_2) có thể biểu diễn qua nhau được. Trường hợp đặc biệt trong các dạng này là tổng và tích của chúng là một hằng số. Đối với các phương trình loại này ta thường đặt tổng hoặc tích của chúng bởi một ẩn phụ để đưa về một phương trình đại số đơn giản hơn rồi giải.

2.6.1.1. Phương trình đối xứng đối với x và $\frac{1}{x}$***:***

Cách giải: Xét phương trình đối xứng dạng

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+...a_n+a_{n-1}\frac{1}{x}+....+a_1\frac{1}{x^{n-1}}+a_0\frac{1}{x^n}=0$$
$$\Leftrightarrow a_0\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)+a_1\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)+...+a_{n-1}\left(x+\frac{1}{x}\right)+a_n=0;\ (a\neq 0)$$

Ta thấy rằng biểu thức $x^k+\frac{1}{x^k}$ $(k\geq 2)$ đối xứng đối với x và $\frac{1}{x}$ nên nó có thể biểu diễn được qua $\sigma_1=x+\frac{1}{x}$ và $\sigma_2=x.\frac{1}{x}=1$.Đặt ẩn phụ $t=\sigma_1=x+\frac{1}{x}$ $(|t|\geq 2)$ thì phương trình đã cho sẽ đưa về phương trình đa thức bậc n đối với biến t, giải tìm t từ đó suy ra các giá trị cụ thể của biến x cần tìm.

Lưu ý: Nếu ta sử dụng công thức tổng luỹ thừa để biểu diễn $x^k+\frac{1}{x^k}$ $(k\geq 2)$ qua các biến σ_1,σ_2 với việc đặt $y=\frac{1}{x}$ thì việc biểu diễn của ta sẽ trở nên dễ dàng hơn.

Ví dụ 23: *Giải phương trình*

$$x^3+\frac{1}{x^3}-x^2-\frac{1}{x^2}-x-\frac{1}{x}+8=0.$$

Giải:

Đặt $t=x+\frac{1}{x}$ $(|t|\geq 2)$. Áp dụng công thức tổng lũy thừa với $y=\frac{1}{x}$, ta có:

$$x^3+\frac{1}{x^3}=t\left(t^2-3\right);\ x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2.$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$t^3-t^2-4t-6=0\Leftrightarrow(t-3)\left(t^2+2t+2\right)=0\Leftrightarrow t=3.$$

Với $t=3$ ta có $x+\frac{1}{x}=3\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ và $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 24: *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$y=x^4+\frac{1}{x^4}-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+x+\frac{1}{x}.$$

Giải:

Đặt $t=x+\frac{1}{x}$ $(|t|\geq 2)$. Khi đó: $x^4+\frac{1}{x^4}=t^4-4t^2+2$; $\quad x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$

Thay vào biểu thức y ta được

$$y=t^4-5t^2+t+4 \quad (|t|\geq 2)$$

Ta có: $y'=4t^3-10t+1=2t\left(2t^2-5\right)+1$

- Nếu $t\geq 2$ thì $2t^2-5\geq 3$ nên $y'>0$.

- Nếu $t\leq -2$ thì $2t\left(2t^2-5\right)\leq -12$ nên $y'<0$

Ta có bảng biến thiên sau:

t	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$-$				$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2		-2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó suy ra $\min y = -2$ khi $t = -2$ hay $x = -1$.

Ngoài ra, trong chương trình phổ thông chúng ta đã học phương trình thuận nghịch (phương trình hệ số đối xứng) vì đã trình bày cách giải ở trong mục 2.2 ở đây chúng ta chỉ xét ví dụ sau.

Ví dụ 25 : *Hãy xác định tất cả các tham số m sao cho phương trình*

$16x^4 - mx^3 + (2m+17)x^2 - mx + 16 = 0$ *có bốn nghiệm thực lập thành một cấp số nhân.*

Giải:

Phương trình đã cho là phương trình hệ số đối xứng bậc 4 và $x = 0$ không phải là nghiệm nên chia hai vế của phương trình cho x^2, ta đưa phương trình về dạng

$$16\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - m\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2m + 17 = 0.$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$, $|t| \geq 2$ phương trình trở thành $16t^2 - mt + 2m - 15 = 0$.

Giả sử phương trình có bốn nghiệm thực lập thành một cấp số nhân. Khi đó, (*) phải có hai nghiệm thực dương.

Giả sử phương trình (*) có hai nghiệm t_1, t_2 và t_1 cho ta hai nghiệm $x_1; \frac{1}{x_1}$; t_2 cho ta hai nghiệm $x_2; \frac{1}{x_2}$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $|x_1| \geq |x_2| \geq 1$. Khi đó, ta có cấp số nhân $x_1, x_2, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_1}$.

Theo tính chất của cấp số nhân $\frac{x_1}{x_2}=x_2^2 \Rightarrow x_1=x_2^3 \Rightarrow x_1+\frac{1}{x_1}=x_2^3+\frac{1}{x_2^3} \Rightarrow t_1=t_2^3-3t_2$

Mặt khác, theo định lý Viét ta có $t_1+t_2=\frac{m}{16};\ t_1.t_2=\frac{2m-15}{16}$.

Từ đó, ta tìm được $m=170$, phương trình đã cho trở thành

$16x^4-170x^3+357x^2-170x+16=0$ phương trình này có bốn nghiệm thực lập thành một cấp số nhân là $8,2,\frac{1}{2},\frac{1}{3}$ với công bội $q=\frac{1}{3}$.

Vậy giá trị của tham số $m=170$.

Bài tập đề nghị:

1. *Giải phương trình sau:* $x^3+\frac{1}{x^3}-5\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+7\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$.

2. *Tìm tất cả các giá trị của m sao cho phương trình* $x^4+mx^3+x^2+mx+1=0$ *có không ít hơn hai nghiệm âm khác nhau.*

2.6.1.2. Phương trình đối xứng với cosx và sinx:

- Dạng: $a(\sin x+\cos x)+b\sin x\cos x=c$

Cách giải:

Đặt $\sin x+\cos x=\sigma_1=t$; và ta có $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

nên điều kiện của t là $|t|\le\sqrt{2}$, khi đó ta có $\sin x\cos x=\sigma_2=\frac{t^2-1}{2}$.

Phương trình đã cho trở thành: $bt^2+2at-b-2c=0$ (*)

Ta thấy rằng (*) là phương trình bậc hai theo ẩn t, giải phương trình ta tìm được t sau đó so sánh với điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$, giải phương trình $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=t$ hoặc $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=t$ ta tìm được nghiệm của phương trình đã cho.

Ngoài ra, ở phổ thông chúng ta cũng thường gặp phương trình lượng giác giả đối xứng theo $\sin x$ và $\cos x$:

- Dạng : $a(\sin x-\cos x)+b\sin x\cos x=c$

Cách giải: Đặt $\sin x-\cos x=t;\ |t|\le\sqrt{2}$, khi đó ta có $\sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$.

Phương trình đã cho trở thành: $bt^2-2at-b+2c=0$ (**)

Tương tự, ta tìm được biến t sau đó giải phương trình $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=t$ hoặc $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=t$ ta tìm được nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 26: *Giải phương trình:* $\sqrt{2}(\cos x+\sin x)=\tan x+\cot x$ (*)

Giải: Điều kiện $\begin{cases}\sin x\ne 0\\ \cos x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ne k\frac{\pi}{2}$

Khi đó (*) $\Leftrightarrow\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\frac{1}{\sin x.cox}\quad(**)$$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right);\ |t|\le\sqrt{2}$ và $t^2\ne 1$, khi đó $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

(**) trở thành: $\sqrt{2}t=\frac{2}{t^2-1}\Leftrightarrow\sqrt{2}t^3-\sqrt{2}t-2=0$

$$\Leftrightarrow\left(t-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}t^2+2t+\sqrt{2}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow t=\sqrt{2}$$

Ta có (*) $\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy phương trình đã cho có một họ nghiệm là $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 27: *Với giá trị nào của m thì phương trình sau đây có nghiệm:*

$$2(\sin x+\cos x)-\sin 2x+m=0$$

Giải:

Phương trình đã cho tương đương: $2(\sin x+\cos x)-2\sin x\cos x+m=0$ (1)

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; $|t|\le\sqrt{2}$. Khi đó phương trình (1) trở thành

$$t^2-2t-1=m \ \ (2).$$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$.

Đặt $f(t)=t^2-2t-1$, khi đó $\min f(t)\le m\le\max f(t),\ \forall t\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

Ta có $f'(t)=2(t-1)\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=1$

Lập bảng biến thiên:

t	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		1		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f(t)$			$-$	0	$+$		
$f'(t)$		$1+2\sqrt{2}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$1-2\sqrt{2}$	

Từ bảng biến thiên suy ra $-\sqrt{2}\le m\le 1+2\sqrt{2}$.

Kết luận: với $-\sqrt{2}\le m\le 1+2\sqrt{2}$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

Ví dụ 28: *Tìm m để phương trình sau đây có nghiệm:* $\sqrt{1+2\cos x}+\sqrt{1+\sin x}=m$

Giải: Đặt $y=\sqrt{1+2\cos x}+\sqrt{1+\sin x}$, ta có $y\ge 0$.

Hàm số xác định khi $\begin{cases}1+2\cos x\ge 0\\1+2\sin x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \dfrac{-\pi}{6}+k2\pi\le x\le\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$; $|t|\le\sqrt{2}$, khi đó $\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$.

Do $\dfrac{-\pi}{6}+k2\pi\le x\le\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\Leftrightarrow\dfrac{-5\pi}{12}+k2\pi\le x-\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{5\pi}{12}+k2\pi$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\le\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\le\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$$

Mặt khác, ta lại có: $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin\dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$.

Suy ra $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\le\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$ hay $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\le t\le\sqrt{2}$.

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $\min y\le m\le\max y$.

Ta có: $y^2=1+2(\sin x+\cos x)+2\sqrt{(1+2\cos x)(1+\sin x)}$

$$=1+2(\sin x+\cos x)+2\sqrt{1+2(\sin x+\cos x)+4\sin x\cos x}$$

$$=1+2t+2\sqrt{1+2t+2(t^2-1)}$$

$$=1+2t+2\sqrt{2t^2+2t-1}\quad\left(t\in\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2},\sqrt{2}\right]\right)$$

Đặt $f(t)=1+2t+2\sqrt{2t^2+2t-1}\quad\left(t\in\left[\dfrac{\sqrt{3}-1}{2},\sqrt{2}\right]\right)$.

Khi đó $f'(t)=2+\dfrac{4t+2}{\sqrt{2t^2+2t-1}}>0,\ \forall t\in\left[\dfrac{\sqrt{3}-1}{2},\sqrt{2}\right]$

Vậy $f(t)$ đồng biến trên $\left[\dfrac{\sqrt{3}-1}{2},\sqrt{2}\right]$.

Suy ra $\min f(t) = f\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = 1+\sqrt{3} \Rightarrow \min y = \sqrt{1+\sqrt{3}}$.

$$\max f(t) = f(\sqrt{2}) = 4\left(\sqrt{2}+1\right) \Rightarrow \max y = 2\sqrt{1+\sqrt{2}}.$$

Vậy để phương trình có nghiệm thì $\sqrt{1+\sqrt{3}} \le m \le 2\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

2.6.1.3. Phương trình đối xứng với $\sin^2 x$ và $\cos^2 x$:

• Dạng: $a\left(\sin^{2m} x + \cos^{2m} x\right) + b\sin^2 x\cos^2 x = c;\ m \ge 1$

Cách giải: Đặt $t = \sin^2 x\cos^2 x = \dfrac{1}{4}\sin^2 2x, \quad t \in [0,1]$.

Ta có $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ phương trình đã cho trở thành phương trình đại số theo ẩn phụ t, giải tìm t đối chiếu điều kiện sau đó suy ra nghiệm của phương trình đã cho. Mặt khác, ta có $\sin^2 2x = \dfrac{1-\cos 4x}{2}$ nên ta cũng có thể đặt $t = \cos 4x,\ t \in [-1,1]$. Khi đó phương trình đã cho cũng trở thành một phương trình đại số.

Ví dụ 29: *Tìm m để phương trình sau đây có nghiệm*

$$4\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) - 4\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) - 2\sin^2 2x = m.$$

Giải: Ta có $\sin^4 x + \cos^4 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x$.

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left[\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x\right] = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x.$$

Đặt $t = \sin^2 x\cos^2 x = \dfrac{1}{4}\sin^2 2x, \quad t \in [0,1]$ phương trình đã cho trở thành:

$$4\left(1 - \frac{1}{2}t\right) - 4\left(1 - \frac{3}{4}t\right) - 2t = m \Leftrightarrow -t = m$$

Do $0 \le t \le 1$ nên phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \le m \le 0$.

Vậy $m \in [-1,0]$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

Bài tập đề nghị:

1. *Giải phương trình:* $\sin x + \cos x = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{1+\sin x\cos x}$.

2. *Cho phương trình* $\sin^4 x + \cos^4 x + m\sin 2x = 1$.

   a) *Giải phương trình khi* $m = 3$.

   b) *Với giá trị nào của m thì phương trình đã cho có nghiệm.*

3. *Giải phương trình:* $\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

4. *Cho phương trình:* $\sin^6 x + \cos^6 x = m\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)$.

   a) *Giải phương trình khi* $m = \frac{5}{6}$.

   b) *Tìm giá trị của m để phương trình đã cho có nghiệm.*

2.6.2. Một số hệ phương trình đối xứng:

Trong phần này chúng ta nghiên cứu những ứng dụng của đa thức đối xứng trong việc giải hệ phương trình đối xứng, mà chủ yếu là hệ phương trình hai ẩn. Đó là:

- Hệ phương trình đối xứng loại 1.
- Hệ phương trình đối xứng loại 2.

2.6.2.1. Hệ phương trình đối xứng loại I:

♦ Dạng: Hệ phương trình $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ là hệ phương trình đối xứng loại *I* nếu

$$\begin{cases} f(x,y)=f(y,x) \\ g(x,y)=g(y,x) \end{cases}.$$

Cách giải: Đặt $\begin{cases} x+y=\sigma_1=S \\ xy=\sigma_2=P \end{cases}$

Điều kiện để tồn tại $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn hệ này là $S^2 - 4P \geq 0$

Ta biểu thị hệ đã cho theo S và P, khi đó *x, y* là các nghiệm của phương trình $t^2 - Sx + P = 0$. Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Nếu hệ có nghiệm là *(a,b)* thì do tính chất đối xứng nên hệ cũng có nghiệm là *(b,a)* Vậy hệ có duy nhất nghiệm khi $x = y$.

Lưu ý: Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $S^2 - 4P \geq 0$, với $S^2 = 4P$ thì $x = y = \dfrac{S}{2}$.

Ví dụ 30: *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ \dfrac{6}{x} + \dfrac{6}{y} + xy = 11 \end{cases}$$

Giải:

Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ 6(x+y) + x^2y^2 = 11xy \quad (*) \\ xy \neq 0 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} x + y = \sigma_1 = S \\ xy = \sigma_2 = P \end{cases}$ $(S^2 - 4P \geq 0)$. Khi đó (*) trở thành:

$$\begin{cases} S + P = 11 \\ 6S + P^2 = 11P \\ P \neq 0 \\ S^2 - 4P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 11 - P \\ 6(11-P) + P^2 = 11P \\ P \neq 0 \\ S^2 - 4P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases}$$

Từ đó, ta có *x, y* là nghiệm của phương trình $t^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 3 \end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là (2, 3) và (3, 2).

Ví dụ 31: *Giải và biện luận phương trình sau theo tham số m*

$$\begin{cases} xy + x + y = m + 2 \\ x^2y + xy^2 = m + 1 \end{cases}.$$

Giải:

Hệ phương trình đã cho tương đương $\begin{cases} xy + x + y = m + 2 \\ xy(x + y) = m + 1 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} x + y = \sigma_1 = S \\ xy = \sigma_2 = P \end{cases}$ $\left(S^2 - 4P \geq 0\right)$, hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} S + P = m + 2 \\ SP = m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S = 1 \\ P = m + 1 \end{cases} \quad (*) \\ \begin{cases} S = m + 1 \\ P = 1 \end{cases} \quad (**) \end{array}\right.$$

+ Giải hệ phương trình (*): $\begin{cases} S = 1 \\ P = m + 1 \end{cases} \Rightarrow S^2 - 4P = -4m - 3$

- Nếu $S^2 - 4P < 0 \Leftrightarrow m > \frac{-3}{4}$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

- Nếu $S^2 - 4P = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-3}{4}$, hệ phương trình đã cho có một nghiệm $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

- Nếu $S^2 - 4P > 0 \Leftrightarrow m < \frac{-3}{4}$, hệ phương trình đã cho có hai nghiệm

$$\left(\frac{1 - \sqrt{-4m - 3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{-4m - 3}}{2}\right); \left(\frac{1 + \sqrt{-4m - 3}}{2}, \frac{1 - \sqrt{-4m - 3}}{2}\right)$$

+ Giải hệ phương trình (**): $\begin{cases} S = m + 1 \\ P = 1 \end{cases} \Rightarrow S^2 - 4P = m^2 + 2m - 3 = (m - 1)(m + 3)$

- Nếu $S^2 - 4P < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

- Nếu $S^2 - 4P = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 \Rightarrow x = y = -1 \\ m = 1 \quad \Rightarrow x = y = 1 \end{array}\right.$, hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(-1, -1); (1, 1)$

- Nếu $S^2 - 4P > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 1 \end{array}\right.$, hệ phương trình đã cho có hai nghiệm:

$$\left(\frac{m+1-\sqrt{m^2+2m-3}}{2}, \frac{m+1+\sqrt{m^2+2m-3}}{2}\right); \left(\frac{m+1+\sqrt{m^2+2m-3}}{2}, \frac{m+1-\sqrt{m^2+2m-3}}{2}\right.$$

Kết luận: + Nếu $m > 1$, hệ phương trình đã cho có hai nghiệm

$$\left(\frac{m+1-\sqrt{m^2+2m-3}}{2}, \frac{m+1+\sqrt{m^2+2m-3}}{2}\right); \left(\frac{m+1+\sqrt{m^2+2m-3}}{2}, \frac{m+1-\sqrt{m^2+2m-3}}{2}\right.$$

+ Nếu $m = 1$, hệ phương trình đã cho có một nghiệm (1, 1).

+ Nếu $\frac{-3}{4} < m < 1$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

+ Nếu $m = \frac{-3}{4}$, hệ phương trình đã cho có một nghiệm $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

+ Nếu $-3 < m < \frac{-3}{4}$, hệ phương trình đã cho có hai nghiệm:

$$\left(\frac{1-\sqrt{-4m-3}}{2}, \frac{1+\sqrt{-4m-3}}{2}\right); \left(\frac{1+\sqrt{-4m-3}}{2}, \frac{1-\sqrt{-4m-3}}{2}\right).$$

+ Nếu $m = -3$, hệ phương trình đã cho có ba nghiệm

$$(-1,-1); \left(\frac{1-\sqrt{-4m-3}}{2}, \frac{1+\sqrt{-4m-3}}{2}\right); \left(\frac{1+\sqrt{-4m-3}}{2}, \frac{1-\sqrt{-4m-3}}{2}\right).$$

+ Nếu $m < -3$, hệ phương trình đã cho có bốn nghiệm

$$\left(\frac{1-\sqrt{-4m-3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{-4m-3}}{2}\right); \left(\frac{1+\sqrt{-4m-3}}{2}, \frac{1-\sqrt{-4m-3}}{2}\right).$$

$$\left(\frac{m+1-\sqrt{m^2+2m-3}}{2}, \frac{m+1+\sqrt{m^2+2m-3}}{2}\right); \left(\frac{m+1+\sqrt{m^2+2m-3}}{2}, \frac{m+1-\sqrt{m^2+2m-3}}{2}\right.$$

Đối với một số hệ phương trình vô tỷ hay hệ phương trình lôgarit, hệ phương trình mũ, hệ phương trình lượng giác,… thuộc hệ phương trình đối xứng loại 1 ta có thể đặt ẩn phụ để chuyển hệ phương trình đã cho về hệ phương trình đa thức đối xứng đối với ẩn phụ.

Ví dụ 32: *Giải hệ phương trình* $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5\\ \sqrt{x+5}+\sqrt{y+5}=8\end{cases}$

Giải: Điều kiện của hệ phương trình đã cho có nghĩa là $\begin{cases}x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$.

Hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{x+5}+\sqrt{y}+\sqrt{y+5}=13\\ \sqrt{x+5}-\sqrt{x}+\sqrt{y+5}-\sqrt{y}=3\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{x+5}+\sqrt{y}+\sqrt{y+5}=13\\ \dfrac{5}{\sqrt{x}+\sqrt{x+5}}+\dfrac{5}{\sqrt{y}+\sqrt{y+5}}=3\end{cases}$$

Đặt $u=\sqrt{x}+\sqrt{x+5};\ \ v=\sqrt{y}+\sqrt{y+5};\ \ \ u,v\ge\sqrt{5}.$

Khi đó hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases}u+v=13\\ \dfrac{5}{u}+\dfrac{5}{v}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=13\\ uv=65\end{cases}\qquad(*)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=\dfrac{39-\sqrt{741}}{2}\\ v=\dfrac{39+\sqrt{741}}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}u=\dfrac{39+\sqrt{741}}{2}\\ v=\dfrac{39-\sqrt{741}}{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

Vì $\dfrac{39-\sqrt{741}}{2}<\sqrt{5}$ nên hệ phương trình (*) vô nghiệm, do đó hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 33: *Giải và biện luận hệ phương trình* $\begin{cases} x+y=a \\ 2^x+2^y=b \end{cases}$ (*)

Giải:

- Nếu $b \le 0$ thì hệ (*) vô nghiệm vì $2^x+2^y>0,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

- Nếu b > 0, khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x+2^y=b \\ 2^x.2^y=2^a \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} u=2^x \\ v=2^y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\log_2 u \\ y=\log_2 v \end{cases};\quad u,v>0$

Khi đó hệ phương trình trên trở thành

$$\begin{cases} u+v=b \\ u.v=2^a \quad (**) \\ u,v>0 \end{cases}$$

- Nếu $b^2-4.2^a<0 \Leftrightarrow b<\sqrt{2^{a+2}} \Rightarrow$ hệ (**) vô nghiệm, do đó hệ (*) vô nghiệm.

- Nếu $b^2-4.2^a=0 \Leftrightarrow b=\sqrt{2^{a+2}} \Rightarrow$ hệ (**) có một nghiệm $u=v=\sqrt{2^a}$ nên hệ (*) có một nghiệm $x=y=\log_2\left(\sqrt{2^a}\right)=\dfrac{a}{2}$.

- Nếu $b^2-4.2^a>0 \Leftrightarrow b>\sqrt{2^{a+2}} \Rightarrow$ hệ (**) có hai nghiệm

$$\left(\frac{b-\sqrt{b^2-2^{a+2}}}{2},\frac{b+\sqrt{b^2-2^{a+2}}}{2}\right);\ \left(\frac{b+\sqrt{b^2-2^{a+2}}}{2},\frac{b-\sqrt{b^2-2^{a+2}}}{2}\right)$$

Nên hệ (*) có hai nghiệm

$$\left(\log_2\frac{b-\sqrt{b^2-2^{a+2}}}{2},\log_2\frac{b+\sqrt{b^2-2^{a+2}}}{2}\right);\ \left(\log_2\frac{b+\sqrt{b^2-2^{a+2}}}{2},\log_2\frac{b-\sqrt{b^2-2^{a+2}}}{2}\right).$$

Kết luận:

- Nếu $b \le 0$ hoặc $b < \sqrt{2^{a+2}}$ thì hệ đã cho vô nghiệm.

- Nếu $b = \sqrt{2^{a+2}}$ hệ phương trình đã cho có một nghiệm $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$.

- Nếu $b > \sqrt{2^{a+2}}$ hệ phương trình đã cho có hai nghiệm

$$\left(\log_2 \frac{b-\sqrt{b^2-2^{a+2}}}{2}, \log_2 \frac{b+\sqrt{b^2-2^{a+2}}}{2}\right); \left(\log_2 \frac{b+\sqrt{b^2-2^{a+2}}}{2}, \log_2 \frac{b-\sqrt{b^2-2^{a+2}}}{2}\right)$$

Ví dụ 34: *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} \log_x(3x+5y) + \log_y(3y+5x) = 4 \\ \log_x(3x+5y).\log_y(3y+5x) = 4 \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện $0 < x, y \ne 1$.

Đặt $u = \log_x(3x+5y)$, $v = \log_y(3x+5y)$ (1). Khi đó hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} u + v = 4 \\ u.v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = 2$$

Thay vào (1) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \log_x(3x+5y) = 2 \\ \log_y(3x+5y) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+5y = x^2 \\ 3y+5x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0 \\ x = y = 8 \end{array}\right.$$

Do x, y > 0 nên hệ phương trình đã cho chỉ có một nghiệm $(8,8)$.

Đối với một số phương trình đa thức đối xứng đối với $\sqrt[k]{f(x)-a}$ và $\sqrt[k]{b-f(x)}$ ta có thể giải bằng cách đặt ẩn phụ $u=\sqrt[k]{f(x)-a}$ và $v=\sqrt[k]{b-f(x)}$ để đưa phương trình về dạng hệ phương trình đối xứng loại 1 với các ẩn u, v để giải.

Ví dụ 35: *Tìm m để phương trình sau đây có nghiệm*

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{6-x}-\sqrt{(x-3)(6-x)}=m$$

Giải:

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x-3} \\ v=\sqrt{6-x} \end{cases};\ u,v\ge 0$

Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} u+v-uv=m \\ u^2+v^2=9 \\ u,v\ge 0 \end{cases} \quad (*)$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi hệ phương trình (*) có nghiệm. Ta nhận thấy rằng hệ (*) là hệ phương trình đối xứng loại *I*.

Đặt $\begin{cases} S=u+v \\ P=uv \end{cases}$

Khi đó hệ (*) trở thành

$$\begin{cases} S-P=m \\ S^2-2P=9 \\ S\ge 0 \\ P\ge 0 \\ S^2-4P\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=S-m \\ S^2-2(S-m)=9 \\ S\ge 0 \\ S\ge m \\ 9-2(S-m)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=S-m \\ S\ge 0 \\ S\ge m \\ S^2-2S-2m-9=0 \\ S\le \dfrac{9+2m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=S-m \\ S\ge 0 \\ S\ge m \\ S=1\pm\sqrt{10-2m} \\ S\le \dfrac{9+2m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-9+6}{2}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{-9+6\sqrt{2}}{2}\le m\le 3$.

Bài tập đề nghị:

1. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30 \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=35 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1 \\ \log_2(1-x).\log_2(1-y)=\dfrac{-1}{6} \end{cases}$

2. Tìm m để hệ sau đây có nghiệm duy nhất

a) $\begin{cases} 5(x+y)-4xy=4 \\ x+y-xy=1-m \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+xy=m \\ x^2+y^2=m \end{cases}$

3. Giải các phương trình sau:

a) $x+\sqrt{17-x^2}+x\sqrt{17-x^2=9}$

b) $\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{14+x}=2$

4. Tìm m để các phương trình sau có nghiệm:

a) $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=m$

b) $\sqrt{m-x}+\sqrt{m+x}=m$

2.6.2.2. Hệ phương trình đối xứng loại II:

■ Dạng: Hệ phương trình $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ là hệ phương trình đối xứng loại 2 nếu $f(y,x)=g(x,y)$.

Cách giải:

• *Trường hợp 1*: Các phương trình trong hệ là các đa thức của các ẩn *x,y*.

Đối với hầu hết các dạng này ta trừ hai vế của hệ phương trình ta thu được phương trình $(x-y)h(x,y)=0$.

Khi đó hệ phương trình đã cho tương đương

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=0\\f(x,y)=0\end{cases} \qquad (*)\\ \begin{cases}h(x,y)=0\\f(x,y)=0\end{cases} \qquad (**)\end{array}\right.$$

Khi đó, nghiệm của hệ phương trình đã cho là hợp các tập nghiệm của hệ phương trình (*) và (**) .

Lưu ý: Có một số hệ đối xứng loại 2 sau khi trừ 2 vế chưa xuất hiện ngay $x-y$ mà phải suy luận tiếp mới có điều này.

Ví dụ 36: *Giải hệ phương trình* $\begin{cases}2x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{x} \ (1)\\ 2y+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{y} \ (2)\end{cases}$

Giải:

Điều kiện của hệ phương trình đã cho là $xy\neq 0$

Hệ phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases}(x-y)\left(2+\dfrac{4}{xy}\right)=0\\ 2x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{x}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y\\ 2x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{x}\end{cases}\\ \begin{cases}y=\dfrac{-2}{x}\\ 2x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{x}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y=-1\\ x=y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=\sqrt{2}; \quad y=-\sqrt{2}\\ x=-\sqrt{2}; \ y=\sqrt{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm là $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right);\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right);(-1,-1);(1,1)$.

Ví dụ 37: *Chứng tỏ rằng hệ phương trình sau đây có nghiệm duy nhất với mọi* $a \neq 0$

$$\begin{cases} 2x^2 = y + \dfrac{a^2}{y} \\ 2y^2 = x + \dfrac{a}{x} \end{cases}$$

Giải:

Điều kiện xác định của hệ phương trình là $x, y > 0$

Hệ phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} 2x^2y = y^2 + a^2 \\ 2xy^2 = x^2 + a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(2xy + x + y) = 0 \\ 2x^2y = y^2 + a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x^2y = y^2 + a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x^3 - x^2 - a^2 = 0 \end{cases}$$

Để chứng minh hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất ta chứng minh phương trình $2x^3 - x^2 - a^2 = 0$ có nghiệm dương duy nhất.

Đặt $f(x) = 2x^3 - x^2 - a^2 = 0$. Ta có $f'(x) = 6x^2 - 2x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$			$-a^2$		$\frac{-27a^2-1}{27}$		$+\infty$

Ta có, $a \neq 0$ nên $-a^2 < 0$, cho nên phương trình $f(x) = 0$ có một và chỉ một nghiệm $x > 0$.

Vậy với mọi $a \neq 0$, hệ phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm.

• *Trường hợp 2*: Các phương trình trong hệ không phải là đa thức

Xét các hệ phương trình hai ẩn đối xứng loại 2

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

Trong đó *f, g* không phải là các đa thức ẩn *x, y*.

Chẳng hạn như hệ phương trình có chứa căn thức, hệ phương trình lôgarit, hệ phương trình lượng giác,... ta có thể đặt ẩn phụ và chuyển hệ phương trình đã cho về hệ phương trình đa thức đối xứng loại 2 rồi giải.

Ví dụ 38: *Giải và biện luận hệ phương trình sau theo m*

$$\begin{cases} \log_x(3x+my)=2 \\ \log_y(3y+mx)=2 \end{cases}$$

Giải:

Hệ phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} 3x+my=x^2 \\ 3y+mx=y^2 \\ 0<x,y\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y+m-3)=0 \\ 3x+my=x^2 \\ 0<x,y\neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y \\ 3x+my=x^2 \\ 0<x,y\neq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y+m-3=0 \\ 3x+my=x^2 \\ 0<x,y\neq 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y \\ x=3+m \qquad (*) \\ 0<x,y\neq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y=3-m-x \\ x^2-(3-m)x-m(3-m)=0 \quad (**) \\ 0<x,y\neq 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

• Xét hệ (*)

+ Nếu $m+3\leq 0$ hoặc $m+3=1 \Leftrightarrow m\leq -3$ hoặc $m=-2$ thì hệ (*) vô nghiệm.

+ Nếu $1\neq m+3>0 \Leftrightarrow -2\neq m>-3$. Hệ (*) có nghiệm $x=y=m+3$.

• Xét hệ (**)

Phương trình $x^2-(3-m)x-m(3-m)=0$ có hai nghiệm dương x_1, x_2 và khác 1 khi và chỉ khi $\begin{cases}\Delta\ge 0\\ S>0\\ P>0\\ 1-(3-m)-m(3-m)\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(3-m)(3+3m)\ge 0\\ -m(3-m)>0\\ 3-m>0\\ m\ne 1\pm\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le m<0\\ m\ne 1-\sqrt{3}\end{cases}$

Nếu $m=1$ thì quay lại trường hợp $x=y$.

Kết luận:

• Nếu $-1\le m<0$ và $m\ne 1-\sqrt{3}$ thì hệ phương trình đã cho có 3 nghiệm

$$(m+3,m+3);\left(\frac{3-m-\sqrt{(3-m)(3+3m)}}{2};\frac{3-m+\sqrt{(3-m)(3+3m)}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{3-m+\sqrt{(3-m)(3+3m)}}{2};\right)\frac{3-m-\sqrt{(3-m)(3+3m)}}{2}$$

• Nếu $-3<m\le -1$ và $m\ne -2$ thì hệ phương trình đã cho có 1 nghiệm $(m+3,m+3)$.

• Nếu $k\le -3$ hoặc $m=-2$ thì hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 39: *Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm*

$$\begin{cases}\sin^2 x+m\tan y=m\\ \tan^2 y+m\sin x=m\end{cases}$$

Giải: Đặt $u=\sin x$, $v=\tan x$ suy ra $|u|\le 1$. Hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases}u^2+mv=m\\ v^2+mu=m\\ |u|\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2+mv=m\\ u^2-v^2-m(u-v)=0\\ |u|\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2+mv=m\\ (u-v)(u+v-m)=0\\ |u|\le 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u^2 + mv = m \\ u = v \\ |u| \le 1 \end{cases} \quad (I) \\ \begin{cases} u^2 + mv = m \\ u + v - m = 0 \\ |u| \le 1 \end{cases} \quad (II) \end{array}\right.$$

Xét hệ phương trình (I):

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $f(u) = u^2 + mu - m = 0$ có nghiệm u thỏa mãn điều kiện $|u| \le 1$.

+ Phương trình có một nghiệm thuộc đoạn $[-1,1]$, khi đó ta có:

$$f(-1).f(1) \le 0 \Leftrightarrow 1 - 2m \le 0 \Leftrightarrow m \ge \frac{1}{2}$$

+ Phương trình có hai nghiệm thuộc đoạn $[-1,1]$, khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta \ge 0 \\ f(1) \ge 0 \\ f(-1) \ge 0 \\ -1 \le \dfrac{S}{2} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m + m^2 \ge 0 \\ 1 \ge 0 \\ 1 - 2m \ge 0 \\ -1 \le \dfrac{-m}{2} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m \le 4 \\ m \ge 0 \end{array}\right. \\ m \le \dfrac{1}{2} \\ -2 \le m \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m \le \frac{1}{2}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm thuộc đoạn $[-1,1]$ khi và chỉ khi $m \ge 0$.

Xét hệ phương trình (II):

Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $g(u) = u^2 - mu + m^2 - m = 0$

có nghiệm $u \in [-1,1]$. Mặt khác, ta lại có điều kiện để phương trình $g(u) = 0$ có nghiệm là $\Delta = m^2 - 4(m^2 - m) \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le \frac{3}{4}$.

Các giá trị của m ở cả hai trường hợp này đã bao hàm trong kết quả của hệ phương trình (I). Vậy điều kiện để hệ phương trình đã cho có nghiệm là $m \ge 0$.

Ngoài ra, để giải một số phương trình chứa căn thức ta có thể đặt ẩn phụ để chuyển phương trình đã cho về hệ phương trình đối xứng loại 2 đối với ẩn phụ rồi giải.

Ví dụ 40: *Giải và biện luận phương trình:*

$$x^3+\left(2-a^2\right)a=2\sqrt[3]{2x+\left(a^2-2\right)a}$$

Giải:

Đặt $y=\sqrt[3]{2x+\left(a^2-2\right)a} \Leftrightarrow y^3=2x+\left(a^2-2\right)a \Rightarrow 2x=y^3+\left(2-a^2\right)a$

Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} x^3+\left(2-a^2\right)a=2y \\ y^3+\left(2-a^2\right)a=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+\left(2-a^2\right)a=2y \\ (x-y)\left(x^2+xy+y^2+2\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-2x+\left(2-a^2\right)a=0 \\ x=y \end{cases}$$

Phương trình $x^3-2x+\left(2-a^2\right)a=0 \Leftrightarrow (x-a)\left(x^2+ax+a^2-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x^2+ax+a^2-2=0 \end{array}\right.$

Xét phương trình $x^2+ax+a^2-2=0$ có $\Delta=8-3a^2$.

+ Nếu $\Delta=8-3a^2<0 \Leftrightarrow |a|>2\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ thì phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $\Delta=8-3a^2=0 \Leftrightarrow |a|=2\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ thì phương trình có một nghiệm $x=\dfrac{-a}{2}$.

+ Nếu $\Delta=8-3a^2>0 \Leftrightarrow |a|<2\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ thì phương trình có hai nghiệm $x_{12}=\dfrac{-a\pm\sqrt{8-3a^2}}{2}$

Kết luận:

- Nếu $|a| > 2\frac{\sqrt{6}}{3}$ thì phương trình đã cho có một nghiệm $x = a$.

- Nếu $|a| = 2\frac{\sqrt{6}}{3}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm $x = a; x = \frac{-a}{2}$.

- Nếu $|a| < 2\frac{\sqrt{6}}{3}$ thì phương trình đã cho có ba nghiệm $x_1 = a, x_{2,3} = \frac{-a \pm \sqrt{8-3a^2}}{2}$.

Bài tập đề nghị:

1. Giải các hệ phương trình sau

$a)\ \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{2-y} = \sqrt{2} \\ \sqrt{y} + \sqrt{2-x} = \sqrt{2} \end{cases}$ $\qquad b)\ \begin{cases} x + \sqrt[4]{y-1} = 1 \\ y + \sqrt[4]{x-1} = 1 \end{cases}$

2. *Giải và biện luận hệ phương trình sau theo m*

$$\begin{cases} 2x + \sqrt{y-1} = m \\ 2y + \sqrt{x-1} = m \end{cases}$$

3. *Giải các phương trình*

$a)\ x^3 + 2 = 3\sqrt[3]{3x-2}$ $\qquad b)\ x = a - b\left(a - bx^2\right)^2$

Phần 3. KẾT LUẬN:

Khóa luận đã trình bày được một số kết quả sau:

- Trình bày cơ sở lý thuyết của các đa thức đối xứng trong các trường hợp hai biến, ba biến, n biến $(n \geq 4)$ và các ứng dụng của nó trong đại số sơ cấp như giải phương trình, hệ phương trình, chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức, phân tích đa thức thành nhân tử,…
- Một số bài toán hay và khó được chọn lọc từ các đề thi học sinh giỏi liên quan đến tính đối xứng trong đại số.

Phần 4. TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ngô Thúc Lanh, Đại số và số học- Tập 3, NXB GD 1987.
2. Hoàng Xuân Sính, Đại số đại cương, NXB GD.
3. Nguyễn Hữu Điển, Đa thức và ứng dụng NXB GD 2003.
4. Bộ giáo dục và đào tạo – Hội toán học Việt Nam(2009), Các bài toán chọn lọc – 45 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, NXB Giáo Dục.
5. Tạp chí 30 năm báo Toán học và tuổi trẻ.
6. Nguyễn Văn Mậu, Phương pháp giải phương trình và bất phương trình, NXB GD năm 1999.
7. Đại số 10, Đại số và giải tích 11, Bộ GD và DT.
8. V.G.Boltianski, N.Ia. Vilenkin (1967), Phép đối xứng trong đại số, NXB Nauka, Moscow.
9. Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng các năm.

GVHD

Võ Văn Minh